

Problema del 23.11.04 - Sez. 4 Parte A

Funzione di Trasferimento nella forma "fattorializzata semplice"

$$G(s) := (s + 8) \cdot \left(\frac{1}{s^2 + 4s + 5} \right) \cdot e^{-3s}$$

NB: la Funzione di Trasferimento è trasformata nella forma di "**costanti di tempo**"

$$K := 8 \left(\frac{1}{5} \right) \quad K = 1.6$$

$$G_1(s) := \frac{s}{8} + 1 \quad G_2(s) := \frac{1}{\frac{s^2}{5} + \frac{4}{5}s + 1} \quad G_3(s) := e^{-3s}$$

$$\left(\tau^2 - \frac{1}{5} \right) \text{ solve, } \tau \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \\ -\frac{1}{5} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad \tau := \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \tau = 0.447$$

$$\left(2 \cdot \zeta \cdot \tau - \frac{4}{5} \right) \text{ solve, } \zeta \rightarrow \frac{2}{5} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \quad \zeta := \frac{2}{5} \cdot \sqrt{5} \quad \zeta = 0.894$$

Questi calcoli sono svolti in MathCad come "calcoli simbolici"

$$N := 500$$

$$k := 0..N$$

$$\text{Min} := -2$$

$$\text{Max} := 2$$

$$\text{espo}(k) := \text{Min} + \frac{k \cdot (\text{Max} - \text{Min})}{N}$$

$$\omega_k := 10^{\text{espo}(k)}$$

Variabili e calcoli di "servizio" per i diagrammi successivi

$$G(s) := K G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s)$$

$$\text{AR1}_k := |G_1(i \cdot \omega_k)| \quad \text{AR2}_k := |G_2(i \cdot \omega_k)| \quad \text{AR3}_k := |G_3(i \cdot \omega_k)|$$

$$\text{AR}_k := K(\text{AR1}_k) \cdot (\text{AR2}_k) \cdot (\text{AR3}_k)$$

1. Diagramma di AR

Calcolo frequenze d'angolo

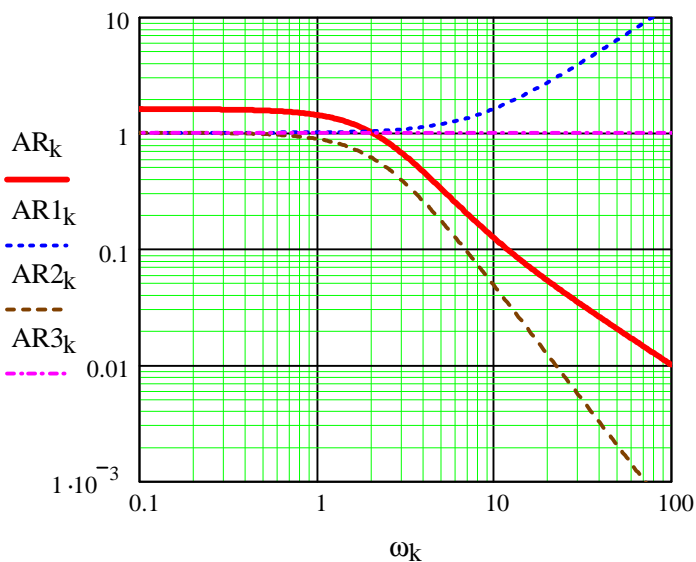
$$\omega_{c1} := \frac{1}{\frac{1}{8}} \quad \omega_{c1} = 8$$

$$\omega_{c2} := \frac{1}{\tau} \quad \omega_{c2} = 2.236$$

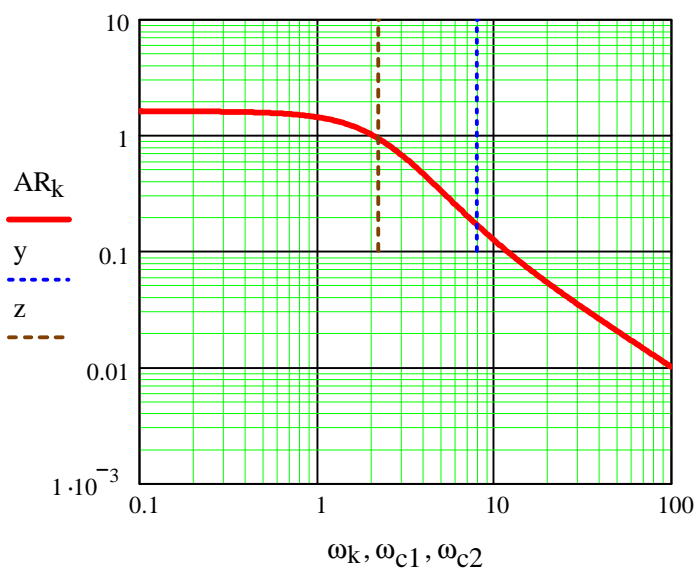
Tabella delle pendenze

Intervallo di frequenze	G ₁	G ₂	e ^{-3s}	Globale
0 ≤ ω < ω _{c2}	0	0	0	0
ω _{c2} ≤ ω < ω _{c1}	0	-2	0	-2
ω _{c1} ≤ ω < ∞	+1	-2	0	-1

NB: questo diagramma riporta AR per le singole funzioni elementari ed, inoltre, AR totale



NB: questo diagramma riporta AR totale ed, inoltre, la posizione delle frequenze d'angolo



4. Frequenza di risonanza

$$\omega_r := \frac{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}{\tau} \quad \text{☞} \quad \omega_r = 1.732i$$

NB: ω_r NON è un numero reale e la RISONANZA NON esiste!
Infatti, per avere RISONANZA G_2 deve essere:
1) sistema *underdamped*
2) $\zeta < 0.707$

2. Diagramma della fase

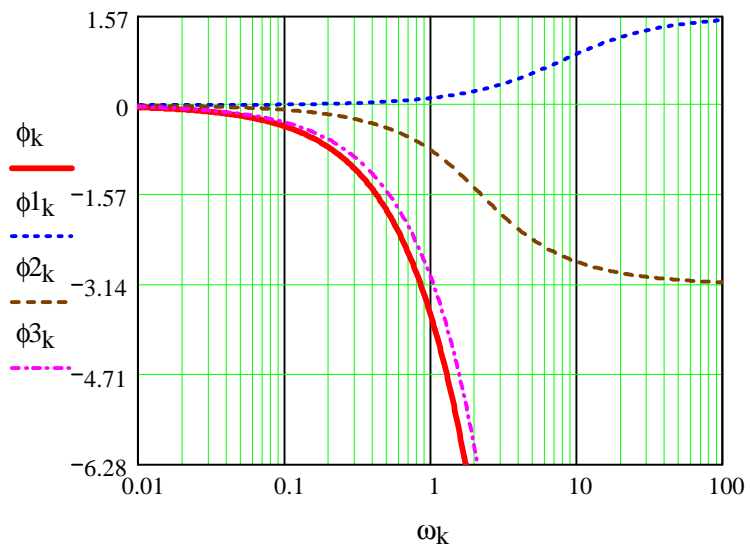
$$\phi_{1k} := \arg(G_1(i \cdot \omega_k))$$

$$\phi_{2k} := \arg(G_2(i \cdot \omega_k))$$

$$\phi_{3k} := -3 \omega_k$$

$$\phi_k := \phi_{1k} + \phi_{2k} + \phi_{3k}$$

NB: angoli espressi in radianti



5. Calcolo della frequenza di crossover

$$\phi(\omega) := \arg(G_1(i \cdot \omega)) + \arg(G_2(i \cdot \omega)) - 3\omega$$

Valore di 1° tentativo: $\omega := 1$

Given

$$\phi(\omega) = -\pi$$

$$\omega_{CO} := \text{Find}(\omega)$$

$$\omega_{CO} = 0.857$$

Controprova:

$$\phi(\omega_{CO}) = -3.142$$

NB: angoli espressi in radianti

The **MathCad Find** function to solve an equation:

1. Define a first trial value for the **unknown variable**.
2. Type the word **Given** to start the procedure.
3. Beneath the *Given*, type equalities and inequalities as part of the equation.
4. The **Find** function contains the result for the **unknown variable**.

6. Applicazione del criterio di stabilità di Bode

Calcolo di AR in corrispondenza della frequenza di *crossover*

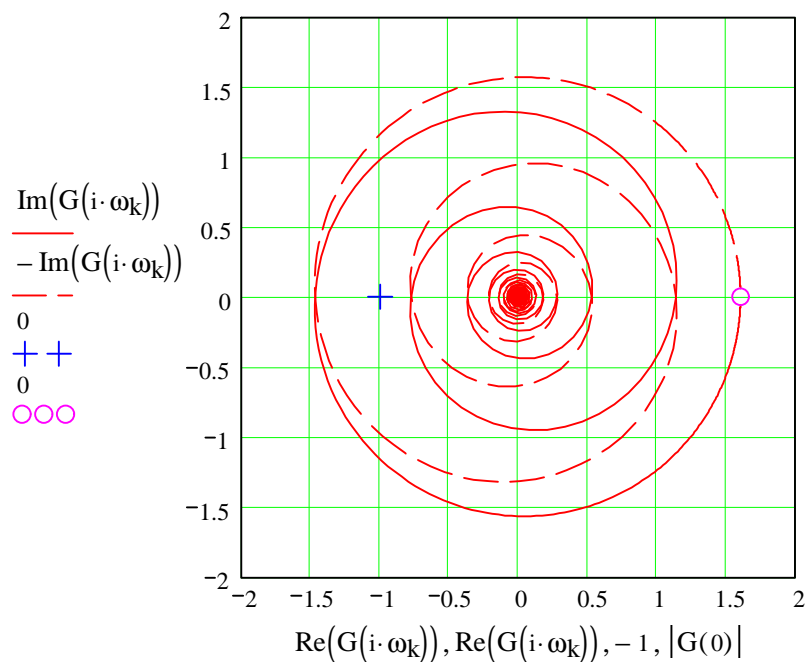
$$AR(\omega) := K |G_1(i\cdot\omega)| \cdot |G_2(i\cdot\omega)| \cdot |G_3(i\cdot\omega)|$$

$$AR(\omega_{CO}) = 1.47$$

NB: in base al criterio di stabilità di Bode, il sistema è instabile BIBO.

7. Diagramma di Nyquist

$$\omega_k := 10^{\text{espo}(k)}$$



8. Criterio di stabilità di Nyquist:

se il diagramma di Nyquist di una F. di trasferimento a ciclo aperto circonda almeno 1 volta il punto $(-1,0)$ al variare della frequenza da $-\infty$ a $+\infty$, la risposta del sistema a ciclo chiuso è instabile.

9. Non esiste un limite di applicabilità del Criterio di Nyquist