Funzione di trasferimento

$G_p = 1/(s+1)^2(s/3+1)$

$N := 500$

$k := 0..N$

$Min := -2$

$Max := 2$

$$espo(k) := Min + \frac{k\cdot(Max - Min)}{N}$$

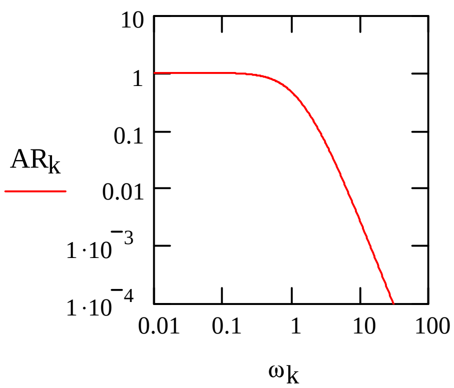
$$\omega_k := 10^{espo(k)}$$

$$G(s) := \left(\frac{1}{s+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{s+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{\frac{s}{3}+1}\right)$$

$$G1(s) := \left(\frac{1}{s+1}\right) \qquad G2(s) := \left(\frac{1}{s+1}\right) \qquad G3(s) := \left(\frac{1}{\frac{s}{3}+1}\right)$$

$$AR1_k := \left|G1\left(i\cdot\omega_k\right)\right| \qquad AR2_k := \left|G2\left(i\cdot\omega_k\right)\right| \qquad AR3_k := \left|G3\left(i\cdot\omega_k\right)\right|$$

$$AR_k := AR1_k\cdot AR2_k\cdot AR3_k$$



$\phi 1_k := \arg(G1(i\cdot\omega_k))$ $\phi 2_k := \arg(G2(i\cdot\omega_k))$ $\phi 3_k := \arg(G3(i\cdot\omega_k))$

$\phi_k := \phi 1_k + \phi 2_k + \phi 3_k$

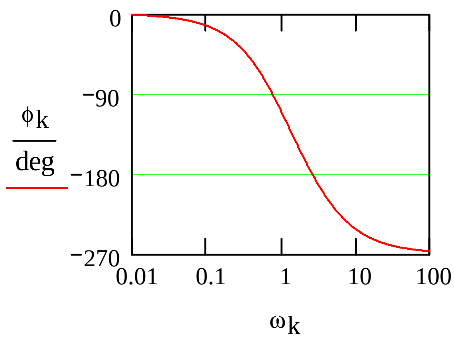


Diagramma di Nyquist

$N := 500$

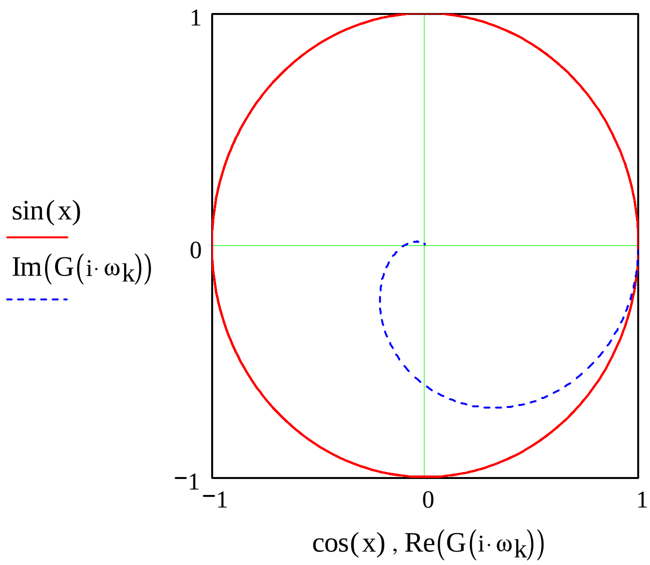
$k := 0 .. N$

$Min := -2$

$Max := 2$

$$espo(k) := Min + \frac{k\cdot(Max - Min)}{N}$$

$\omega_k := 10^{espo(k)}$



Funzione di trasferimento

$G_{ol} = K\,(s-1)/(s+1)^2(s+3)$

M numero degli zeri e N numero dei poli

$M := 1$ $\qquad N := 3$

$m := 1..M$ $\qquad n := 1..N$

Quesito a)

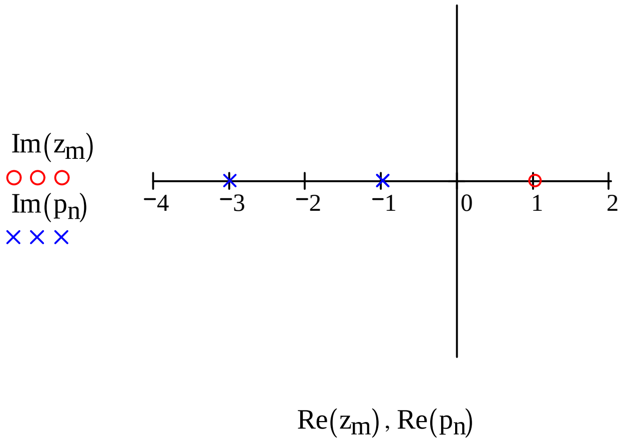
Zeri $\qquad$ Poli

$z_m := 1$ $\qquad p_n := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Il numero delle traiettorie è pari al numero dei poli, cioè 3. Le traiettorie partono dai poli e terminano negli zeri.
Il polo -1 ha molteplicità di ordine 2: da esso partiranno due traiettorie.

Quesito b)

L'asse reale fa parte del root locus se, preso un punto generico, la somma del numero di poli e di zeri che si trovano a destra di tale punto è dispari. Il tratto dell'asse a sinistra di tale punto fa parte della traiettoria finchè non incontriamo un altro polo o zero sull'asse reale. Se vi sono poli o zeri di molteplicità q, essi devono essere conteggiati q volte.



Vi è una porzione di root locus sull'asse reale tra -3 e 1.

Quesito c)

Ci sono (n-m) traiettorie tali che, al crescere di K_c, tendono a valori infiniti. Gli asintoti sono n-m rette che si diramano dal centro di gravità.
Essendo n-m=2, vi sono due asintoti.

Calcolo del centro di gravità

$$\gamma := \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} p_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} z_i\right)}{N - M} \qquad \gamma = -3$$

Calcolo degli angoli

Gli asintoti si dipartono dal centro di gravità formando un angolo con l'asse reale

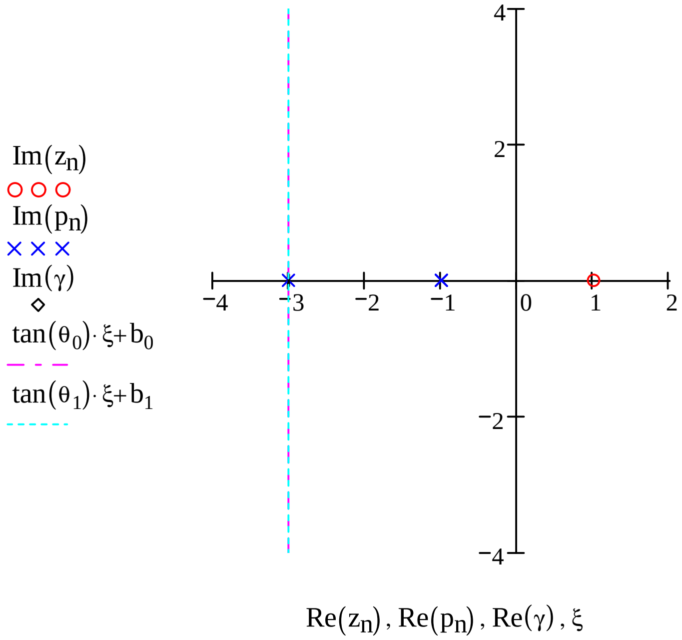
$$l := 0 .. N - M - 1$$

$$\theta_l := \pi \cdot \frac{(2 \cdot l + 1)}{N - M} \qquad b_l := -\gamma \cdot \tan(\theta_l)$$

$\theta_l =$

90
270

deg



Quesito d)

Le q traiettorie che partono da un polo di molteplicità q formano con l'asse reale angoli dettidi partenza. Le ν traiettorie che arrivano ad uno stesso zero di molteplicità ν formano angoli detti di arrivo. Nel caso in esame esiste solo il polo -1 di molteplicità due. A sinistra e a destra di tale polo, per l'applicazione delle regole precedenti, l'asse reale fa parte del root locus. Necessariamente, dunque, le due traiettorie che partono da -1 devono formare un angolo di 0 e π, rispettivamente.

Calcolo degli angoli di partenza

Polo -1: molteplicità 2

$q := 2$ $\kappa := 0..q-1$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_1 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\mathrm{signum}(p_1 - p_j))\right)}{q}$$

$\Theta_\kappa =$

180
360

deg

NB: la procedura di calcolo di MathCad effettivamente calcola gli stessi angoli di cui sopra MODULO 180°.

Quesito e)

Il Breakaway point è il punto in cui due traiettorie, emergendo da due poli adiacenti (o muovendosi verso due zeri adiacenti) sull'asse reale, si intersecano e poi lasciano (o entrano) l'asse, con angoli di +o- $\pi/2$.
Nel caso in esame ci sono due traiettorie sull'asse reale, una che parte dal polo -1 ed un'altra che parte dal polo -3, che devono necessariamente scontrarsi in un punto di breakaway.

Calcolo del breakaway point

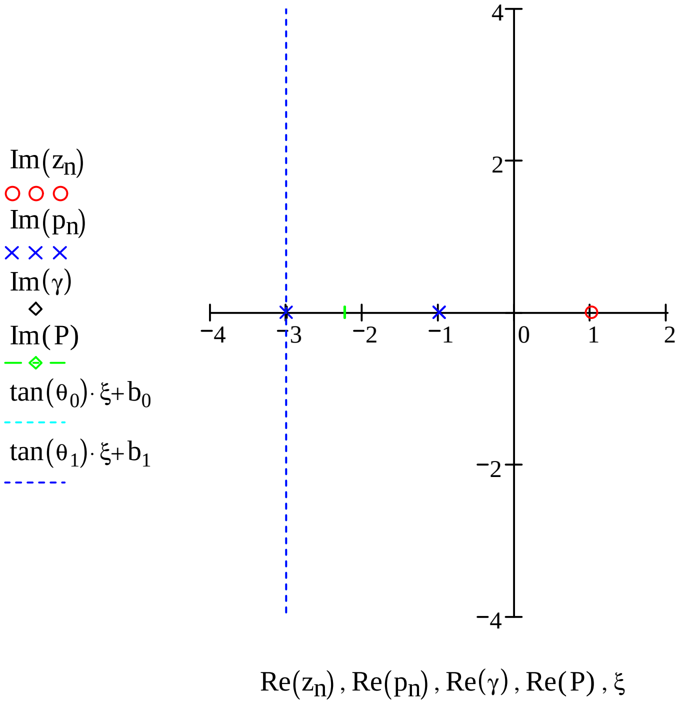
$x := -2.5$

Given

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{x - z_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{x - p_j}$$

$P := \mathrm{Find}(x)$

$P = -2.236$



Quesito g)

Il sistema presenta una traiettoria che attraversa l'asse reale. I valori di K_c corrispondenti alla porzione di traiettoria a destra dell'asse immaginario rendono il sistema instabile.

Quesito h)

Per il calcolo del valore di Kc limite basta osservare che la traiettoria interseca l'asse reale nell'origine. Tale valore può essere determinato quindi applicando il criterio dell'ampiezza nel punto s=0.

Calcolo del guadagno limite

$k := 1 \qquad s := 0$

Given

$$\frac{k \cdot \prod_{i=1}^{M} |s - z_i|}{\prod_{j=1}^{N} |s - p_j|} = 1$$

$k := \mathrm{Find}(k) \qquad k = 3$

Al di sopra di questo valore il sistema è instabile