

Si può dimostrare che dato un generico sistema lineare con funzione di trasferimento $G(s)=Q(s)/P(s)$ tale che il grado del polinomio $Q(s)$ è minore del polinomio $P(s)$, sono verificate le seguenti proprietà:

- La risposta del sistema ad input sinusoidale è ancora una funzione sinusoidale.
- il rapporto tra l'ampiezza dell'output e quella dell'input è una funzione della frequenza ed è data dal modulo di $G(s)$, posto $s=i\omega$:

$$AR = \text{modulo di } G(i\omega)$$

- la risposta è traslata, rispetto all'input, di un angolo che è funzione della frequenza ed è dato da:

$$\phi = \text{argomento di } G(i\omega)$$

Diagrammi di Bode

I diagrammi di Bode rappresentano un metodo grafico per l'analisi di risposta in frequenza di un sistema dinamico. Essi sono costituiti da due grafici che mostrano la dipendenza di AR e della fase ϕ dalla frequenza ω .

Diagrammi di Nyquist

I diagrammi di Nyquist rappresentano un modo alternativo per analizzare graficamente la risposta in frequenza di un sistema dinamico. Si disegna nel piano complesso la parte immaginaria e la parte reale del numero complesso $G(i\omega)$ al variare della frequenza ω .

La distanza tra un punto del grafico e l'origine rappresenta AR , mentre l'angolo formato con l'asse reale rappresenta la fase ϕ .

Casi notevoli

Dati necessari per i diagrammi

$$N := 50$$

$$k := 0..N$$

$$\text{Min} := -2$$

$$\text{Max} := 2$$

$$\text{espo}(k) := \text{Min} + \frac{k \cdot (\text{Max} - \text{Min})}{N}$$

$$\omega_k := 10^{\text{espo}(k)}$$

1° caso) Sistema del primo ordine

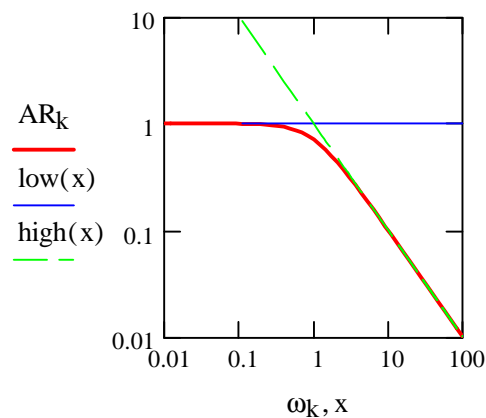
$$K := 1$$

$$\tau := 1$$

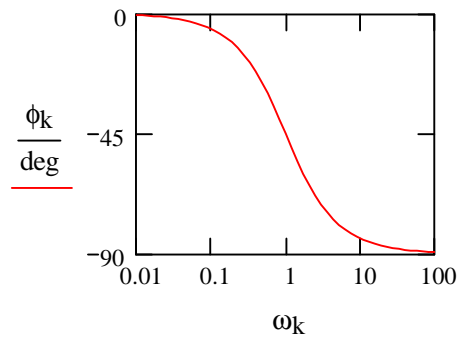
$$G(s) := \frac{K}{\tau \cdot s + 1}$$

Diagrammi di Bode

$$AR_k := |G(i \cdot \omega_k)| \quad \text{low}(x) := 1 \quad \text{high}(x) := \frac{1}{x}$$



$$\phi_k := \arg(G(i \cdot \omega_k))$$

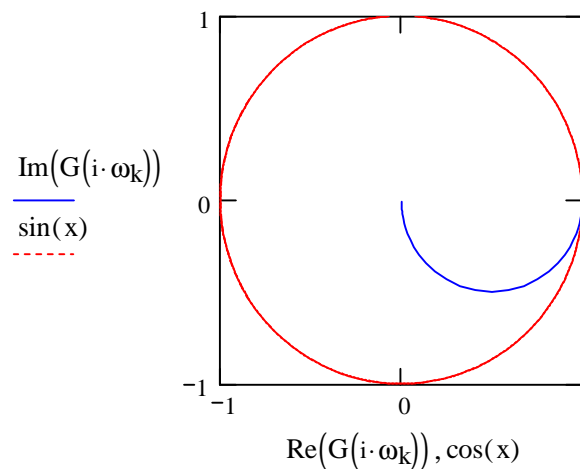


Quando ω tende a zero AR tende ad 1: asintoto di bassa frequenza.

Quando ω tende ad infinito AR tende ad $1/\omega$, quindi in scala logaritmica l'asintoto di alta frequenza è rappresentato da una retta di pendenza -1.

Il valore del guadagno influenza solo AR ma non la fase ϕ .

Diagramma di Nyquist



2° caso) Sistema del secondo ordine

$$N := 500$$

$$k := 0..N$$

$$\text{Min} := -2$$

$$\text{Max} := 2$$

$$\text{espo}(k) := \text{Min} + \frac{k \cdot (\text{Max} - \text{Min})}{N}$$

$$\omega_k := 10^{\text{espo}(k)}$$

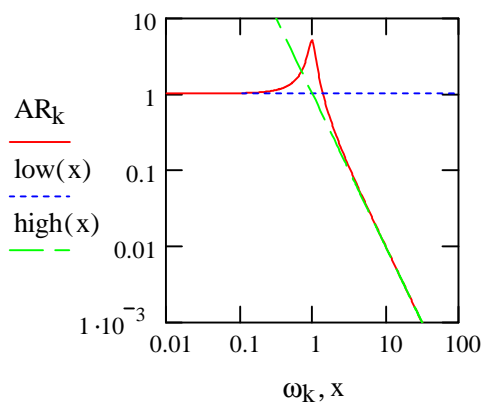
$$K := 1$$

$$\tau := 1$$

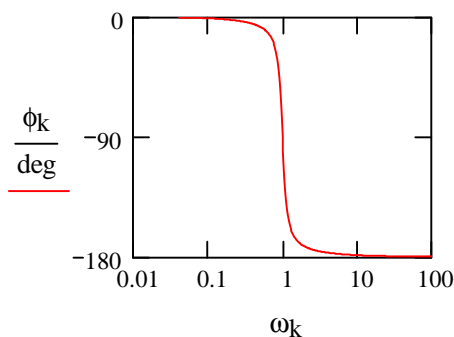
$$\zeta := 0.1$$

$$G(s) := \frac{K}{\tau^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \tau \cdot s + 1}$$

$$\text{AR}_k := |G(i \cdot \omega_k)| \quad \text{low}(x) := 1 \quad \text{high}(x) := \frac{1}{x^2}$$



$$\phi_k := \arg(G(i \cdot \omega_k))$$

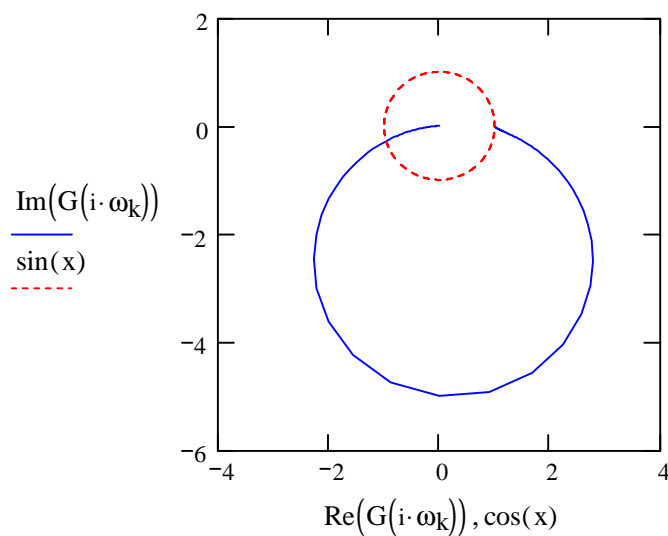


Quando ω tende a zero AR tende ad 1: asintoto di bassa frequenza.

Quando ω tende ad infinito AR tende ad $1/\omega$ al quadrato, quindi in scala logaritmica l'asintoto di alta frequenza è rappresentato da una retta di pendenza -2.

Quando $\zeta < 1$ (sistema underdamped) AR supera il valore unitario, mentre al variare del guadagno l'asintoto di bassa frequenza trasla verticalmente.

Diagramma di Nyquist



Quando ω è zero, AR è 1 e ϕ è zero e quindi la distanza dall'origine è 1.
 Quando ω tende ad infinito, AR tende a zero, ϕ è -180° e quindi terminerà nell'origine.
 Quando $\zeta < 1$ (sistema underdamped) AR supera il valore unitario e quindi il diagramma può uscire dal cerchio unitario. Se $\zeta > 1$ il diagramma è tutto compreso nel cerchio unitario.

3° caso) Dead time

$N := 10000$

$k := 0..N$

$Min := -2$

$Max := 2$

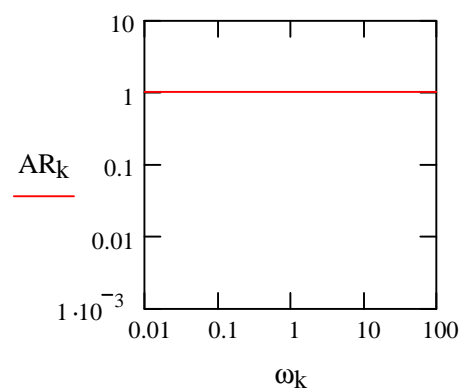
$espo(k) := Min + \frac{k \cdot (Max - Min)}{N}$

$\omega_k := 10^{espo(k)}$

$\tau := 1$

$G(s) := \exp(-\tau \cdot s)$

$AR_k := |G(i \cdot \omega_k)|$



$$\phi_k := -\tau \cdot \omega_k$$

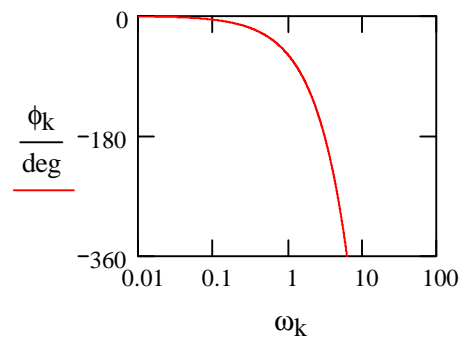
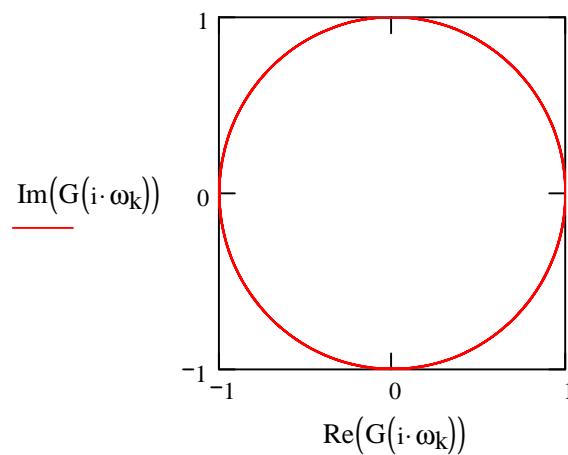


Diagramma di Nyquist



4° caso) Sistemi in serie

$$N := 10000$$

$$k := 0..N$$

$$\text{Min} := -2$$

$$\text{Max} := 2$$

$$\text{espo}(k) := \text{Min} + \frac{k \cdot (\text{Max} - \text{Min})}{N}$$

$$\omega_k := 10^{\text{espo}(k)}$$

$$K1 := 1 \quad K2 := 1 \quad K3 := 1$$

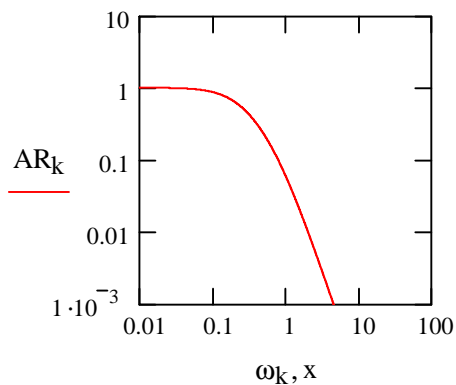
$$\tau1 := 2 \quad \tau2 := 5 \quad \tau3 := 1$$

$$G1(s) := \left(\frac{K1}{\tau1 \cdot s + 1} \right) \quad G2(s) := \left(\frac{K2}{\tau2 \cdot s + 1} \right) \quad G3(s) := \left(\frac{K3}{\tau3 \cdot s + 1} \right)$$

$$G(s) := G1(s) \cdot G2(s) \cdot G3(s)$$

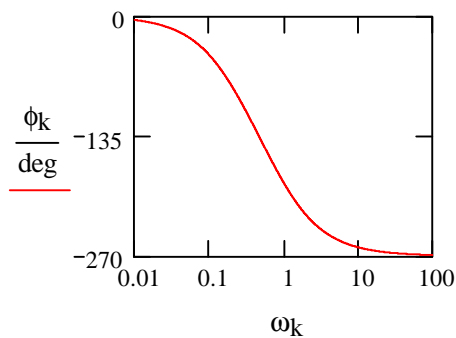
$$AR1_k := |G1(i \cdot \omega_k)| \quad AR2_k := |G2(i \cdot \omega_k)| \quad AR3_k := |G3(i \cdot \omega_k)|$$

$$AR_k := AR1_k \cdot AR2_k \cdot AR3_k$$



$$\phi1_k := \arg(G1(i \cdot \omega_k)) \quad \phi2_k := \arg(G2(i \cdot \omega_k)) \quad \phi3_k := \arg(G3(i \cdot \omega_k))$$

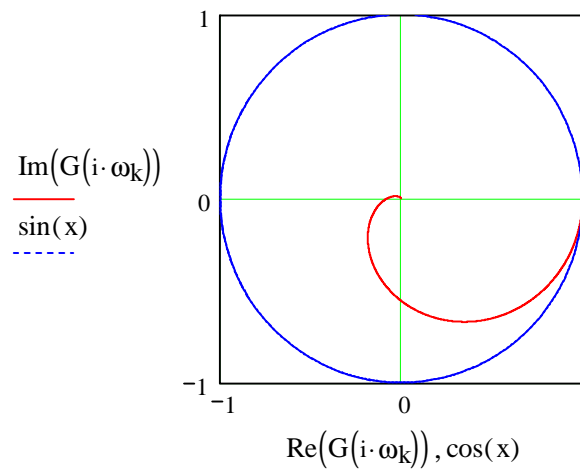
$$\phi_k := \phi1_k + \phi2_k + \phi3_k$$



Il logaritmo di AR del sistema complessivo è uguale alla somma dei logaritmi degli AR dei singoli sistemi che costituiscono la serie.

La fase ϕ complessiva è uguale alla somma delle singole fasi.

Diagramma di Nyquist



Quando ω tende a zero AR tende ad 1 e ϕ a zero, mentre quando ω tende ad infinito AR tende a zero e ϕ a -270° .

Il diagramma di Nyquist, quindi, parte dall'asse reale a distanza unitaria e termina nell'origine passando per il terzo quadrante.

5° caso) Controllori feedback

$N := 10000$

$k := 0..N$

$Min := -2$

$Max := 2$

$$espo(k) := Min + \frac{k \cdot (Max - Min)}{N}$$

$$\omega_k := 10^{espo(k)}$$

Controllore proporzionale

In tal caso i diagrammi sono banali essendo il valore di AR costante e pari a K_c , mentre la fase è costantemente uguale a zero.

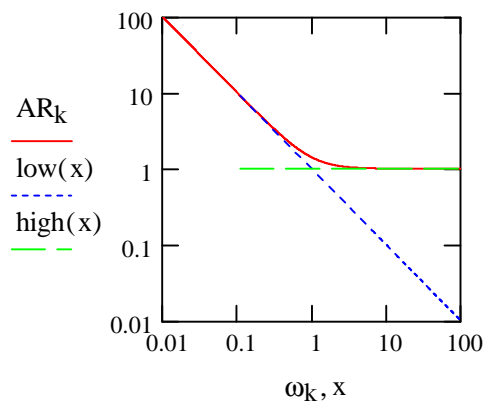
Controllore proporzionale-integrale

$$K_c := 1$$

$$\tau := 1$$

$$G(s) := K_c \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau \cdot s} \right)$$

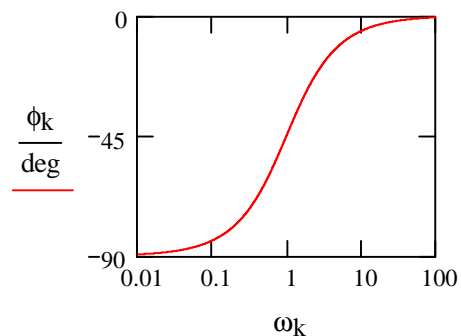
$$AR_k := |G(i \cdot \omega_k)| \quad \text{low}(x) := \frac{1}{x} \quad \text{high}(x) := 1$$



Quando ω tende a zero AR tende, in scala logaritmica ad una retta di pendenza -1: asintoto di bassa frequenza.

Quando ω tende ad infinito AR tende ad 1: asintoto di alta frequenza.

$$\phi_k := \arg(G(i \omega_k))$$



Quando ω tende a zero ϕ tende a -90° .

Quando ω tende ad infinito ϕ tende a zero.

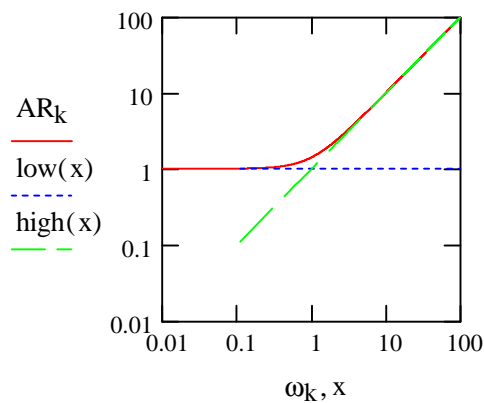
Controllore proporzionale-derivativo

$$K_c := 1$$

$$\tau := 1$$

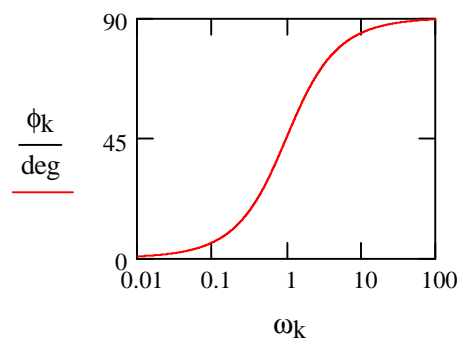
$$G(s) := K_c \cdot (1 + \tau \cdot s)$$

$$AR_k := |G(i \cdot \omega_k)| \quad \text{high}(x) := x \quad \text{low}(x) := 1$$



Quando ω tende a zero AR tende ad 1: asintoto di bassa frequenza.
Quando ω tende ad infinito AR tende, in scala logaritmica ad una retta di pendenza -1: asintoto di alta frequenza.

$$\phi_k := \arg(G(i \omega_k))$$



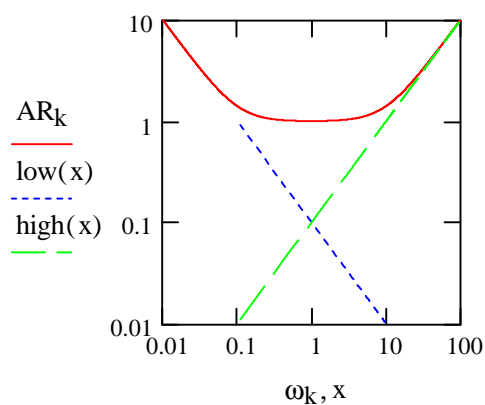
Quando ω tende a zero ϕ tende a 0.
Quando ω tende ad infinito ϕ tende a 90°.

Controllore proporzionale-integrale-derivativo**caso: $\tau_D < \tau_I$**

$$K_c := 1 \quad \tau_D := 0.1 \quad \tau_I := 10$$

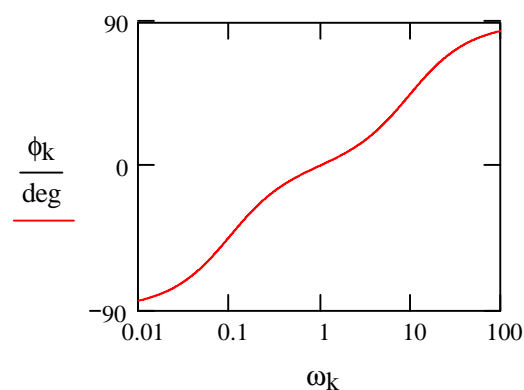
$$G(s) := K_c \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D \cdot s \right)$$

$$AR_k := |G(i \cdot \omega_k)| \quad \text{high}(x) := x \cdot \tau_D \quad \text{low}(x) := \frac{1}{\tau_I x}$$



AR tende ad infinito sia per bassi che alti valori della frequenza

$$\phi_k := \arg(G(i \omega_k))$$



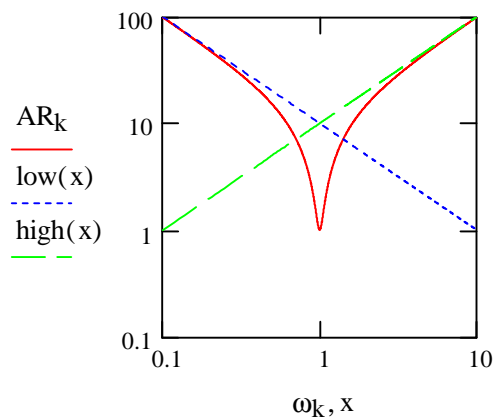
Quando ω tende a zero ϕ tende a -90° .
Quando ω tende ad infinito ϕ tende a 90° .

Controllore proporzionale-integrale-derivativo**caso: $\tau_D > \tau_I$**

$$K_c := 1 \quad \tau_D := 10 \quad \tau_I := 0.1$$

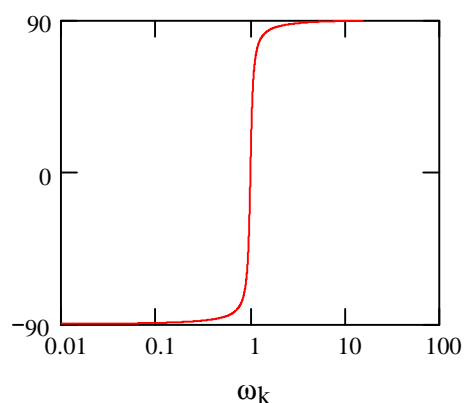
$$G(s) := K_c \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D \cdot s \right)$$

$$AR_k := |G(i \cdot \omega_k)| \quad \text{low}(x) := \frac{1}{\tau_I x} \quad \text{high}(x) := \tau_D x$$



AR tende ad infinito sia per bassi che alti valori della frequenza

$$\phi_k := \arg(G(i \omega_k))$$



Quando ω tende a zero ϕ tende a -90° .
Quando ω tende ad infinito ϕ tende a 90° .