Problema del 2.05.05 - Sez. 4 Parte A

Funzione di Trasferimento nella forma "fattorializzata semplice"

$$G(s) := 10 \cdot s \cdot \left(\frac{1}{s^2 + 4s + 8}\right) \cdot e^{-2s}$$

NB: la Funzione di Trasferimento è trasformata nella forma delle "**costanti di tempo**"

$$G_1(s) := s \qquad G_2(s) := \frac{1}{\frac{s^2}{8} + \frac{4}{8}s + 1} \qquad G_3(s) := e^{-2s}$$

$$K := 10\left(\frac{1}{8}\right) \qquad ☞ \qquad K = 1.25$$

$$\tau^2 - \frac{1}{8} \text{ solve}, \tau \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{4} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \qquad ☞ \qquad \tau := \frac{\sqrt{2}}{4} \qquad \tau = 0.354$$

$$2 \cdot \zeta \cdot \tau - \frac{4}{8} \text{ solve}, \zeta \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \qquad ☞ \qquad \zeta := \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \zeta = 0.707$$

Questi calcoli sono svolti in MathCad come "calcoli simbolici"

$$N := 500$$

$$k := 0 .. N$$

$$Min := -2 \qquad Max := 2$$

$$espo(k) := Min + \frac{k \cdot (Max - Min)}{N}$$

$$\omega_k := 10^{espo(k)}$$

Variabili e calcoli di "servizio" per i diagrammi successivi

$$G(s) := K\, G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s)$$

$$AR1_k := \left|G_1(i \cdot \omega_k)\right| \qquad AR2_k := \left|G_2(i \cdot \omega_k)\right| \qquad AR3_k := \left|G_3(i \cdot \omega_k)\right|$$

$$AR_k := K(AR1_k) \cdot (AR2_k) \cdot (AR3_k)$$

1. Diagramma di AR

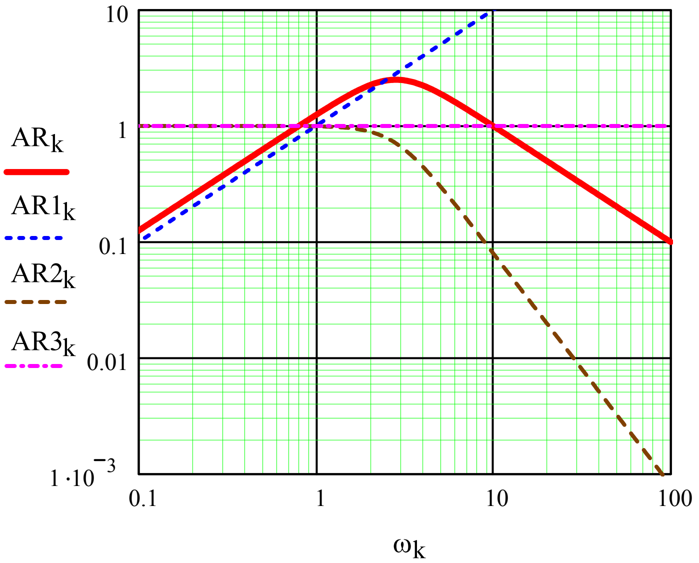
Calcolo frequenze d'angolo

$\omega_{c1} := \frac{1}{\tau}$ ☞ $\omega_{c1} = 2.828$

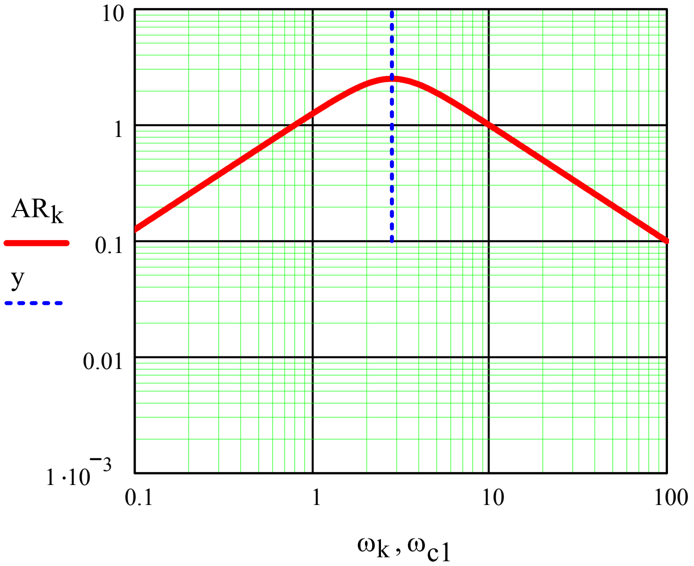
Tabella delle pendenze

Intervallo di frequenze	G_1	G_2	e^{-2s}	Globale
$0 \le \omega < \omega_{c1}$	+1	0	0	+1
$\omega_{c1} \le \omega < \infty$	+1	-2	0	-1

NB: questo diagramma riporta AR per le singole funzioni elementari ed, inoltre, AR totale



NB: questo diagramma riporta AR totale ed, inoltre, la posizione delle frequenze d'angolo



4. Frequenza di risonanza

$$\omega_r := \frac{\sqrt{1-2\zeta^2}}{\tau}$$

☞ $\omega_r = 4.215i \times 10^{-8}$

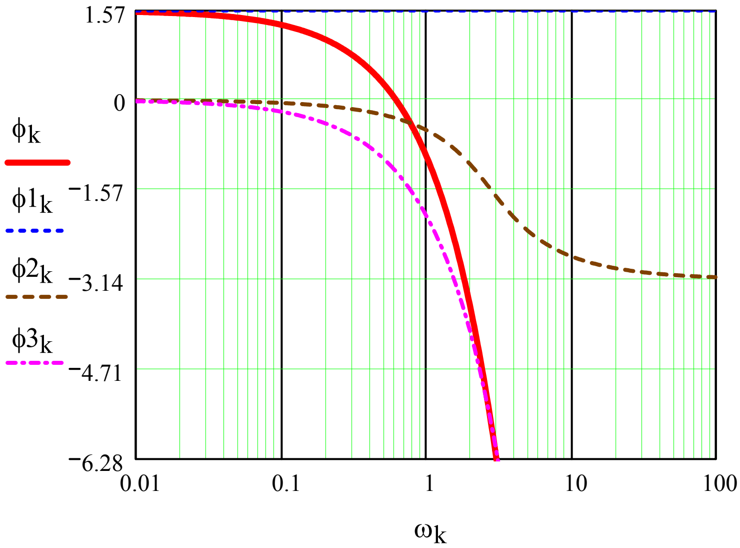
NB: ω_r NON è un numero reale e la RISONANZA NON esiste!
Infatti, per avere RISONANZA G_2 deve essere:
1) sistema *underdamped*
2) $\zeta < 0.707$

2. Diagramma della fase

$\phi1_k := \arg\left(G_1(i\cdot\omega_k)\right)$ $\phi2_k := \arg\left(G_2(i\cdot\omega_k)\right)$ $\phi3_k := -2\,\omega_k$

$\phi_k := \phi1_k + \phi2_k + \phi3_k$

NB: angoli espressi in radianti



5. Calcolo della frequenza di *crossover*

$$\phi(\omega) := \arg\left(G_1(i\cdot\omega)\right) + \arg\left(G_2(i\cdot\omega)\right) - 2\omega$$

Valore di 1° tentativo: $\omega := 1$

Given

$\phi(\omega) = -\pi$

$\omega_{co} := \text{Find}(\omega)$ $\omega_{co} = 1.848$

The **MathCad Find** function to solve an equation:

1. Define a first trial value for the **unknown variable**.
2. Type the word **Given** to start the procedure.
3. Beneath the Given, type equalities and inequalities as part of the equation.
4. The **Find** function contains the result for the **unknown variable**.

Controprova: $\phi(\omega_{co}) = -3.142$

NB: angoli espressi in radianti

6. Applicazione del criterio di stabilità di Bode

Calcolo di AR in corrispondenza della frequenza di *crossover*

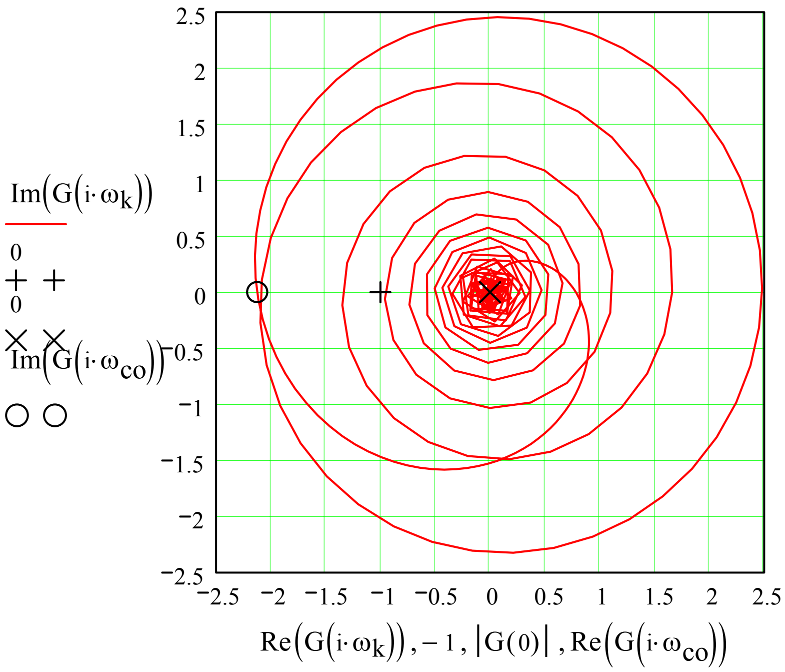
$$AR(\omega) := K \left|G_1(i\cdot\omega)\right| \cdot \left|G_2(i\cdot\omega)\right| \cdot \left|G_3(i\cdot\omega)\right|$$

$$AR(\omega_{co}) = 2.125$$

NB: in base al criterio di stabilità di Bode, il sistema è **instabile BIBO**.

7. Diagramma di Nyquist

$$\omega_k := 10^{espo(k)}$$



NB: nel diagr. di Nyquist, qui tracciato per $0 \le \omega < \infty$, sono evidenziati i seguenti punti:

valore iniziale (x)

coordinata -1,0 (+)

valore a ω_{co} (o)

Si nota pure che AR continua a crescere, sia pure di poco, per $\omega > \omega_{co}$ e, dopo 1 giro, decresce tendendo a 0.

8. Criterio di stabilità di Nyquist:
se il diagramma di Nyquist di una F. di trasferimento a ciclo aperto circonda almeno 1 volta il punto (-1,0) al variare della frequenza da -∞ a +∞,
la risposta del sistema a ciclo chiuso è instabile.

9. Non esiste un limite di applicabilità del **Criterio di Nyquist**