Sezione 6: MODELLISTICA MATEMATICA

Si desidera sviluppare il modello matematico della **camicia di raffreddamento ad acqua** di un motore a combustione interna, che è collocato all'aperto sul piazzale dello stabilimento industriale, accoppiato ad un gruppo elettrogeno e, come tale, utilizzato a N. giri (ed a potenza) costante.

La **camicia** riceve una potenza termica $\dot{Q}_g$ dal motore, disperde calore attraverso la sua superficie esterna S esposta all'aria esterna (avente temperatura T_a, generalmente variabile nel tempo) con coefficiente globale di scambio U_a, dissipa una potenza termica $\dot{Q}_r$ attraverso un "radiatore" collegato ad essa ed investito dal vento che soffia sul piazzale con velocità v_V, generalmente variabile nel tempo.

La variabile che si intende predire con il modello è la **temperatura** T dell'acqua nella camicia.

Valgono le seguenti **ipotesi**:

1. perfetta miscelazione dell'acqua nella camicia
2. nessuna perdita né rabbocco d'acqua, e quindi **volume V costante**
3. vale la seguente legge di dissipazione: $\dot{Q}_r = c\, v_V$ con c = cost.
4. densità dell'acqua ρ_w = cost.
5. c_{pw} = cost.
6. U_a = cost.

Si chiede:

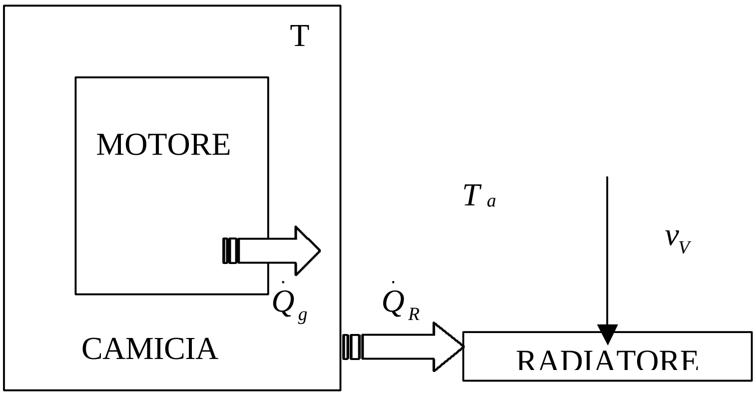
a. disegnare un **diagramma di processo semplificato** per la camicia in esame
b. scrivere il modello matematico in **stazionario**
c. scrivere il modello matematico **dinamico**
d. **classificare** il modello matematico **dinamico** così ottenuto
e. individuare **variabili di ingresso**, **stato** ed **uscita**, nonché i **parametri** del modello
f. discutere quali tra le variabili di ingresso possano essere prese come **funzioni forzanti** e ragionevolmente di che **tipo**, vista la natura del problema
g. esprimere il modello in **variabili di deviazione**
h. trasportare il modello matematico **dinamico** nel **dominio di Laplace**
i. determinare la **funzione di trasferimento**

Come approfondimento, si consideri il caso in cui l'ipotesi 3) cambia come segue:

3'. $\dot{Q}_r = c\, v_V + d\, T^{1/2}$ con c = cost.; d = cost.

j. discutere quali cambiamenti interverranno nel modello
k. come si può ottenere una **funzione di trasferimento** in questo caso?

a) Schema del processo



VARIABILI

T = Temperatura dell’ H_2O nella camicia.

T_a = Temperatura dell’aria.
U_a = Coefficiente globale di scambio tra la sup. della camicia e l’ambiente esterno.

$\dot{Q}_R$ = Potenza termica dissipata dalla camicia attraverso un radiatore investito dal vento a velocità $v_V = f(t)$

IPOTESI

1) perfetta mix dell’ H_2O nella camicia
2) nessuna perdita, e quindi volume V = costante
3) vale la seguente legge di dissipazione $\dot{Q}_R = Cv_V$ con C = cost
4) $Cp_w = \cos t$
5) $r_w = \cos t$
6) U_a = cost
7) $\dot{Q}_g$ = cost

b) Modello matematico in stazionario

$$\dot{Q}_g - U_a S(T_s - T_{a,s}) - \dot{Q}_{r,s} = 0$$

$$\dot{Q}_g - U_a S(T_s - T_{a,s}) - Cv_{v,s} = 0$$

c) Modello matematico dinamico

$$\dot{Q}_g - U_a S(T - T_a) - Cv_V = Vr_w Cp_w \frac{dT}{dt}$$

CI : per t = 0 $\Rightarrow T = T_s ; T_a = T_{a,s} ; v_V = v_{V,s}$

d)

Si tratta di una ODE di 1° ordine, lineare, non omogenea, a coefficienti costanti.

e)

Variabili di ingresso = T_a , v_V
Variabili di stato = T
Variabili di uscita = T

Parametri = $\dot{Q}_g , C, V, \rho_w , Cp_w , U_a , S$

f)

Funzioni forzanti = T_a , v_V
Tipo = rampa limitata, onda quadra, sinusoidale, gradino.

g)

dinamico $\dot{Q}_g - U_a ST + U_a ST_a - Cv_v = Vr_w C_{pw} \frac{dT}{dt}$

stazionario $\dot{Q}_g - U_a ST_{,s} + U_a ST_{a,s} - Cv_{v,s} = 0$

variabili di deviazione $-U_a S(T - T_S) + U_a S(T_a - T_{a,s}) - C(v_v - v_{v,s}) = V\rho_w C_{pw} \frac{dT^1}{dt}$

posti $T^1 = T - T_{,s} ; T_a^1 = T_a - T_{a,s} ; v_v^1 = (v_v - v_{v,s})$

avremo

$$-U_a ST^1 + U_a ST_a^1 - Cv_v^1 = V\rho_w C_{pw} \frac{dT^1}{dt}$$

CI : per t =0 $\Rightarrow T^1 = 0$

h)

Prima di trasformare il modello viene posto in forma canonica:

$$V\rho_w C_{pw}\frac{dT^1}{dt}+U_a S T^1 = U_a S T_a^1 - C v_v^1$$

posti $\tau_p = \dfrac{V\rho_w C_{pw}}{U_a S}$; $\quad k_{p_1} = \dfrac{U_a S}{U_a S} = 1$; $\quad k_{p_2} = \dfrac{C}{U_a S}$

avremo

$$t_p \frac{dT^1}{dt} + T^1 = k_{p_1} T_a^1 - k_{p_2} v_v^1$$

$$t_p[S\bar{T}^1(S) - T^1(0)] + \bar{T}^1(S) = k_{p_1}\bar{T}_a^1(S) - k_{p_2}\bar{v}_v^1(S)$$

$$\bar{T}^1(S)[t_p S = +1] = k_{p_1}\bar{T}_a^1(S) - k_{p_2}\bar{v}_v^1(S)$$

i)

Poiché abbiamo due funzioni forzanti avremo due funzioni di trasferimento

1) consideriamo $v_V = \cos t \Rightarrow v_v^1 = 0$ quindi:

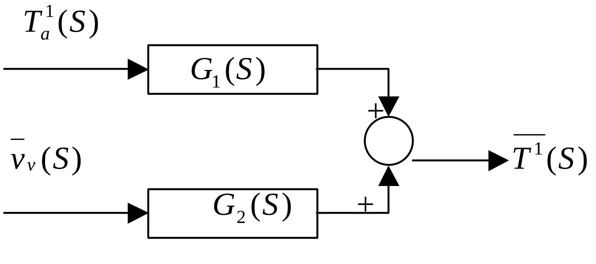
$$G_1(S) = \frac{\bar{T}^1(S)}{\bar{T}_a^1(S)} = \frac{k_{p1}}{t_p s + 1}$$

2) consideriamo $T_a = \cos t \Rightarrow T_a^1 = 0$ quindi:

$$G_2(S) = \frac{\overline{T^1}(S)}{\overline{v_v}(S)} = -\frac{k_{p2}}{t_p s + 1}$$

quindi sarà:

$$\bar{T}^1(S) = G_1(S)\overline{T_a^1(S)} + G_2(S)\bar{v}_v^1(S)$$



APPROFONDIMENTO

L'ipotesi 3) cambia come segue:

$3^1)\ \dot{Q}_r = Cv_V + dT^{1/2}$ con C = cost e d = cost

j)

Il modello dinamico sarà:

$$\dot{Q}_g - U_a S(T - T_a) - (Cv_V + dT^{1/2}) = V\rho_w C_{pw} \frac{dT}{dt}$$

quindi siamo di fronte ad una ODE non lineare, non omogenea, a coefficienti costanti.

k)

In questo caso per ottenere la funzione di trasferimento bisogna prima linearizzare il modello, perché solo i modelli lineari possono essere trasportati nel dominio di LaPlace. Ma una volta linearizzato il procedimento è identico a quello precedente.
Come metodo di linearizzazione possiamo utilizzare l'espansione in serie di Taylor, arrestata al primo termine, del termine non lineare ossia $T^{1/2}$.