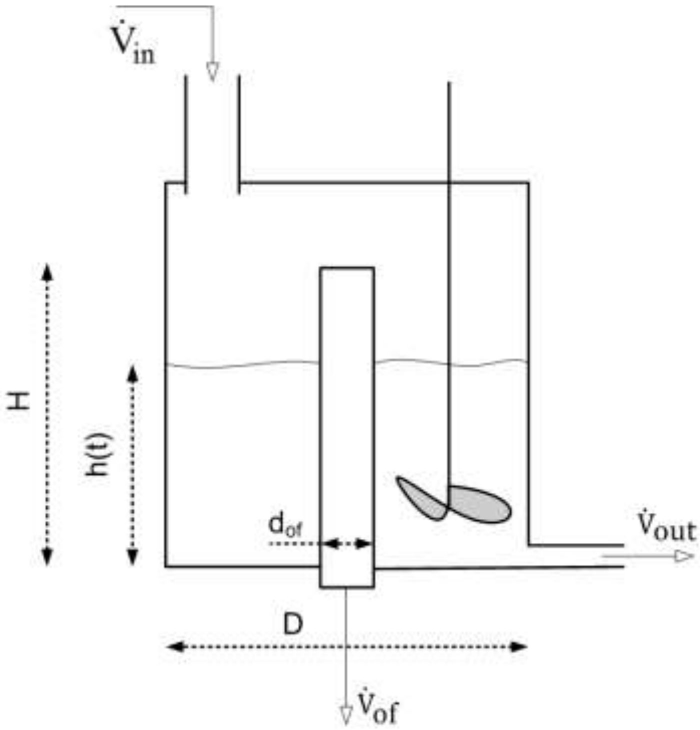
SEZIONE 6: MODELLISTICA MATEMATICA

6.1. Sviluppo di un modello matematico dinamico per un sistema a parametri concentrati

Un **serbatoio** di travaso di acque reflue con ingresso ed uscita in continuo è dotato anche di uno tubo di troppo pieno (*overflow pipe*) di diametro d_{of} (v. Figura).

L'acqua entra dall'alto attraverso un tubo di alimentazione con portata $\dot{V}_i(t)$ ed esce lateralmente sul fondo con portata $\dot{V}_{out}(t)$.



Valgono le seguenti **ipotesi**:

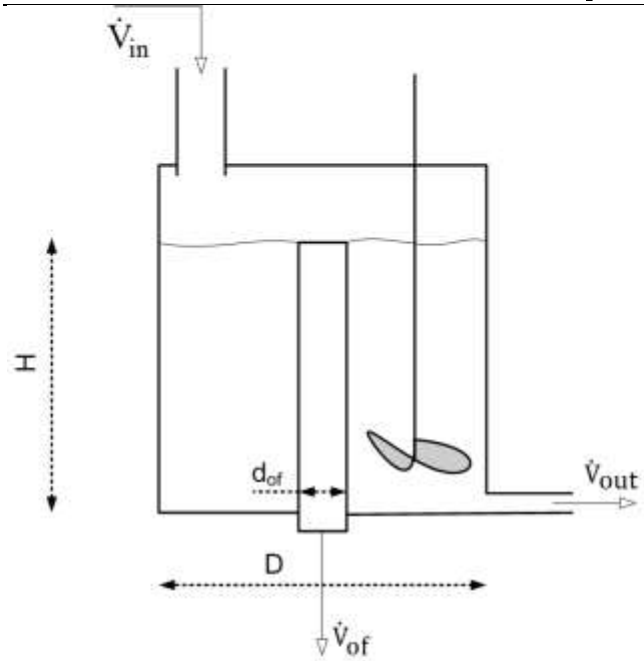
1. Il battente idrostatico h(t) si trova sempre ad una quota inferiore all'altezza del tubo di troppo pieno H
2. Il "pelo libero" si può ritenere sempre orizzontale.
3. La densità del liquido ρ è costante
4. La portata di liquido in uscita dipende linearmente dal battente idrostatico secondo la legge $\dot{V}_{out}(t) = h(t)/R$ con R = costante
5. Il sistema è isotermo

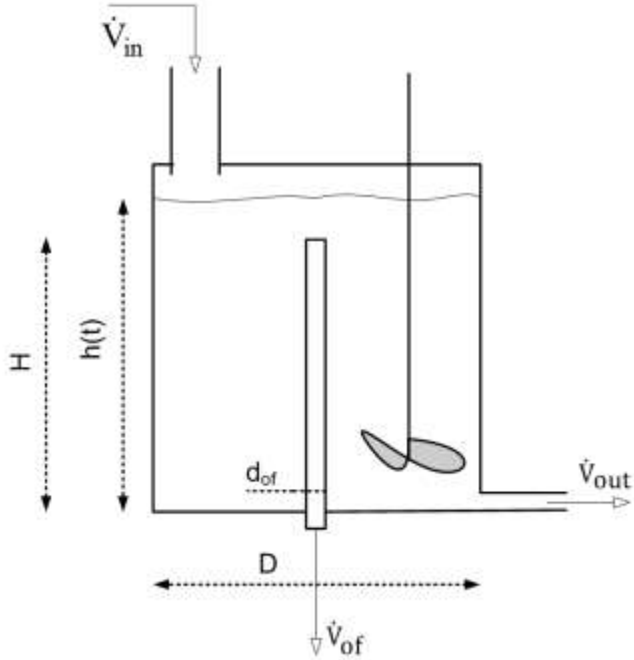
Si chiede:

a. scrivere il modello matematico in **stazionario**
b. scrivere il modello matematico **dinamico**, avendo cura di esprimere <u>dettagliatamente</u> il volume V(t) del liquido in funzione del livello h(t)
c. portare, se possibile, il modello **dinamico** nella **forma canonica** nel dominio del tempo
d. **classificare** il modello matematico **dinamico** così ottenuto
e. individuare **variabili di ingresso**, **stato** ed **uscita**, nonché i **parametri** del modello
f. discutere quali tra le variabili di ingresso possano essere prese come **funzioni forzanti** e ragionevolmente di che **tipo**, vista la natura del problema
g. esprimere il modello in **variabili di deviazione**
h. trasportare il **modello matematico dinamico** nel dominio di Laplace
i. determinare la **funzione di trasferimento G(s)**

Come approfondimento, si consideri il caso in cui l'**ipotesi 1)** non è più valida, e quindi possono verificarsi i seguenti 2 casi (v. Figura alla pag. seg.):

I. l'*overflow pipe* è di diametro d_{of} sufficiente a funzionare da troppo pieno ed effettivamente smaltisce la portata in eccesso e mantiene il livello costante al valore H
II. l'*overflow pipe* è di diametro d_{of}' insufficiente a funzionare da troppo pieno, quindi determina un innalzamento del livello h(t)>H e smaltisce una portata $\dot{V}_{of}(t) = \beta[h(t)-H]$





Si chiede:
j. scrivere il **bilancio di materia** per il caso I
k. scrivere il **bilancio di materia** per il caso II
l. determinare la **funzione di trasferimento G(s)** per il caso I
m. determinare la **funzione di trasferimento G(s)** per il caso I

SOLUZIONE PARZIALE

CASO BASE

a. Bilancio di materia in stazionario

b. Bilancio di materia dinamico

In entrambi i casi il serbatoio di travaso di acque reflue con ingresso ed uscita in continuo si comporta esattamente come la “vasca a livello variabile” ed il tubo di troppo pieno (*overflow pipe*) NON funziona.

La legge generale di conservazione in base alla quale scrivere il **bilancio di materia** è:

IN – OUT = ACC

Il volume di liquido nel termine ACC, essendo per un liquido ρ = cost., è:

$$V(t) = \pi \frac{D^2}{4} h(t) - \pi \frac{{d_{of}}^2}{4} h(t) = \frac{\pi}{4}\left[D^2 - {d_{of}}^2\right] h(t)$$

Dopo passaggi …
con la CI: t = 0 $h(0) = h_s$
…
la Fdt sarà quella classica del **1° ordine**.

d. Classificazione del modello matematico dinamico così ottenuto

- Macroscopico

- descritto da una ODE del 1° ordine, lineare, non omogenea, a coeff. costanti

e. Individuazione delle variabili di ingresso, stato ed uscita, nonché dei parametri del modello

- Ingresso: $\dot{V}_{in}$(t)
- Stato: h(t)
- Uscita: $\dot{V}_{out}$(t)
- Parametri: D, d_{of}, H, R, β

f. Variabili di ingresso che possono essere prese come funzioni forzanti e tipo

- •$\dot{V}_{in}$(t) può ragionevolmente essere a rampa (limitata !) od oscillante (a bassa frequenza !)

CASO I

I. l'*overflow pipe* è di diametro d_{of} sufficiente a funzionare da troppo pieno ed effettivamente smaltisce la portata in eccesso e mantiene il livello costante al valore H

In questo caso il serbatoio di travaso di acque reflue con ingresso ed uscita in continuo "perde" la capacità di accumulo della "vasca a livello variabile" in quanto il tubo di troppo pieno (*overflow pipe*) smaltisce ogni possibile variazione della portata in ingresso.

La legge generale di conservazione in base alla quale scrivere il **bilancio di materia** è:

$$\text{IN} \quad - \quad \text{OUT} \quad = \quad 0$$

Il Bilancio di materia può essere scritto SOLO in stazionario.
Quindi, NON esiste la **funzione di trasferimento G(s)** per il caso I

CASO II

II. l'*overflow pipe* è di diametro d_{of}' insufficiente a funzionare da troppo pieno, quindi determina un innalzamento del livello h(t)>H e smaltisce una portata $\dot{V}_{of}$(t) = β[h(t)-H]

In questo caso il serbatoio di travaso di acque reflue con ingresso ed uscita in continuo "torna" ad avere un accumulo del tipo "vasca a livello variabile" in quanto il tubo di troppo pieno (*overflow pipe*) è insufficiente a smaltire ogni possibile variazione della portata in ingresso.

La legge generale di conservazione in base alla quale scrivere il **bilancio di materia** torna ad essere:

$$\text{IN} \quad - \quad \text{OUT} \quad = \quad \text{ACC}$$

Il volume di liquido nel termine ACC, essendo per un liquido ρ = cost., è:

$$V(t) = \pi \frac{D^2}{4} h(t) - \pi \frac{{d_{of'}}^2}{4} H$$

Il termine ACC è espresso attraverso la derivata $\left(\frac{dV(t)}{dt}\right)$ dove però il termine costante $\left(\pi \frac{{d_{of'}}^2}{4} H\right)$ dà luogo ad un contributo nullo alla derivata stessa.

Il termine IN è ovviamente la funzione forzante $\dot{V}_{in}(t)$.

Il termine OUT è somma di 2 contributi di scarico dal fondo secondo la legge di efflusso lineare:

$$\dot{V}_{of}(t) + \dot{V}_{out}(t) = \beta[h(t)-H] + h(t)/R$$

Dopo passaggi …
con la CI: $t = 0$ $\qquad h(0) = h_s$
…
la Fdt sarà quella classica del **1° ordine**.