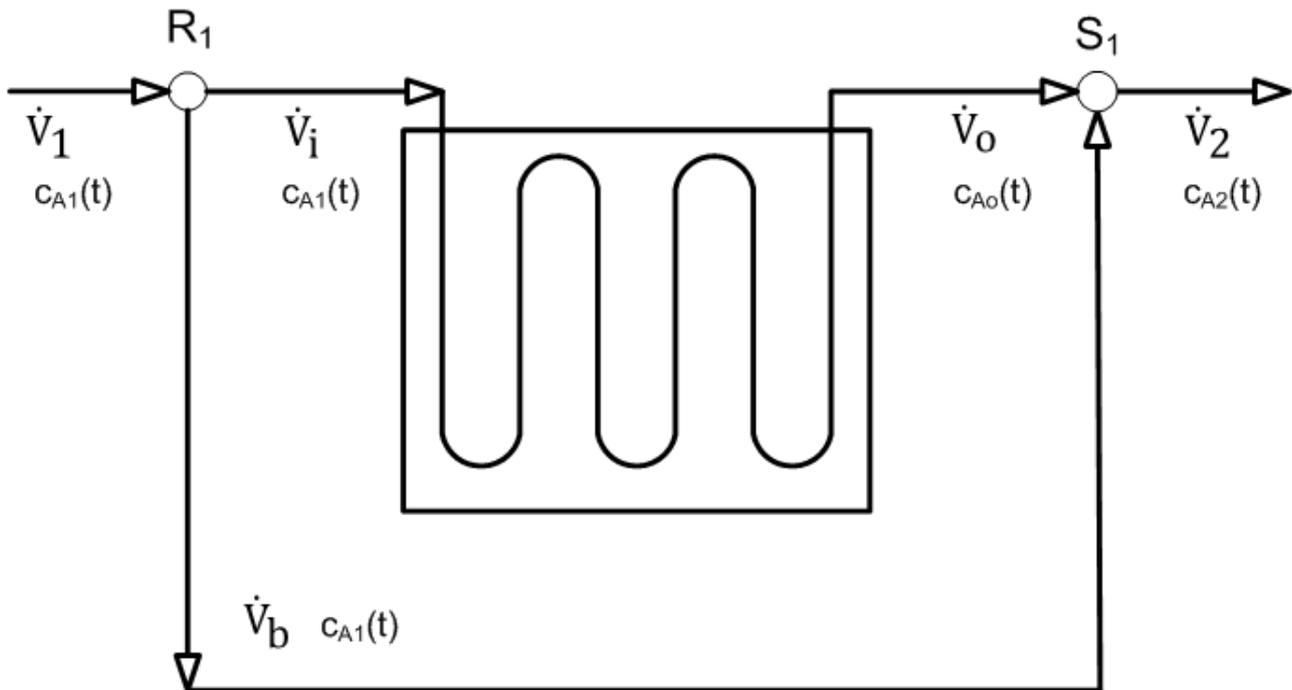


Sezione 6: MODELLISTICA MATEMATICA

6.1. Sviluppo di un modello matematico dinamico per un sistema a parametri concentrati

Una sezione d'impianto, destinata alla movimentazione di una soluzione, prevede un *bypass* in parallelo ad un serpentino (v. figura).



La soluzione arriva con portata \dot{V}_1 e concentrazione di soluto c_{A1} ad un **ripartitore di flusso R_1** , dove parte il *bypass* con portata \dot{V}_b calcolabile in base al rapporto di *bypass* $b = \dot{V}_b / \dot{V}_1$.

Il serpentino è alimentato con portata \dot{V}_i e concentrazione di soluto c_{A1} , e presenta in uscita una corrente con portata \dot{V}_o e concentrazione di soluto c_{A0} .

Il **giunto di somma S_1** consente l'unione delle 2 portate \dot{V}_b e \dot{V}_o .

Valgono le seguenti **ipotesi**:

1. La densità del liquido ρ è costante
2. La portata \dot{V}_1 è costante
3. Il sistema è isoterma
4. Il rapporto di *bypass* $b = \dot{V}_b / \dot{V}_1$ è costante
5. Il serpentino può essere trattato come un componente a volume trascurabile

Ciò che si intende predire con il modello è la **funzione di trasferimento $G(s) = c_{A2} / c_{A1}$** .

Si chiede di pervenire per l'intera sezione d'impianto a:

- a) scrivere il modello matematico in **stazionario**
- b) scrivere il modello matematico **dinamico**

- c) **classificare** il modello matematico **dinamico** così ottenuto
 d) individuare **variabili di ingresso, stato ed uscita**, nonché i **parametri** del modello
 e) discutere quali tra le variabili di ingresso possano essere prese come **funzioni forzanti** e ragionevolmente di che **tipo**, vista la natura del problema
 f) esprimere il modello in **variabili di deviazione**
 g) trasportare il **modello matematico dinamico** nel dominio di Laplace
 h) determinare la **funzione di trasferimento**

SVOLGIMENTO

quesiti a) e b)

Ripartitore di flusso R_1

Bilancio globale (sia allo stato stazionario sia in transitorio)

$$\rho \dot{V}_1 = \rho \dot{V}_i + \rho \dot{V}_b \quad (1.)$$

↓

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_i + \dot{V}_b \quad (2.)$$

Bilancio parziale su A in transitorio

$$\dot{V}_1 c_{A1}(t) = \dot{V}_i c_{A1}(t) + \dot{V}_b c_{A1}(t) \quad (3.)$$

↓

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_i + \dot{V}_b \quad (4.)$$

Ⓜ Il bilancio parziale su A risulta ridondante in quanto “degenera” nel bilancio globale: ciò è una conseguenza della definizione stessa di **Ripartitore di flusso**.

Giunto di somma S_1

Bilancio globale (sia allo stato stazionario sia in transitorio)

$$\dot{V}_o + \dot{V}_b = \dot{V}_2 \quad (5.)$$

Bilancio parziale su A in transitorio

$$\dot{V}_o c_{A0}(t) + \dot{V}_b c_{A1}(t) = \dot{V}_2 c_{A2}(t) \quad (6.)$$

$$\frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_2} c_{A0}(t) + \frac{\dot{V}_b}{\dot{V}_2} c_{A1}(t) = c_{A2}(t) \quad (7.)$$

↓

$$(1 - b) c_{A0}(t) + b c_{A1}(t) = c_{A2}(t) \quad (8.)$$

Serpentino**Bilancio globale (sia allo stato stazionario sia in transitorio)**

$$\dot{V}_i = \dot{V}_o \quad (9.)$$

Bilancio parziale su A allo stato stazionario

$$\dot{V}_i c_{A0s} = \dot{V}_o c_{A1s} \quad (10.)$$

↓

$$c_{A0s} = c_{A1s} \quad (11.)$$

Bilancio parziale su A in transitorio

$$\dot{V}_i c_{A0}(t) = \dot{V}_o c_{A1}(t - t_D) \quad (12.)$$

↓

$$c_{A0}(t) = c_{A1}(t - t_D) \quad (13.)$$

che rappresenta il **Ritardo di trasporto****Sistema globale (sia allo stato stazionario sia in transitorio)**

Quindi, globalmente risulta:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 \quad (14.)$$

quesito g)**Giunto di somma S₁****Bilancio parziale su A in transitorio**

$$\mathcal{L}[(1 - b)c_{A0}(t) + bc_{A1}(t)] = \mathcal{L}[c_{A2}(t)] \quad (15.)$$

↓

$$(1 - b)c_{A0}(s) + bc_{A1}(s) = c_{A2}(s) \quad (16.)$$

Serpentino

$$\mathcal{L}c_{A0}(t) = \mathcal{L}c_{A1}(t - t_D) \quad (17.)$$

↓

$$c_{A0}(s) = c_{A1}(s)e^{-t_D s} \quad (18.)$$

quesito h)

Sostituiamo l'eq. 17 nella 15:

$$(1 - b)c_{A1}(s)e^{-tDs} + bc_{A1}(s) = c_{A2}(s) \quad (19.)$$

$$c_{A1}(s)[(1 - b)e^{-tDs} + b] = c_{A2}(s) \quad (20.)$$

Introduciamo la **funzione di trasferimento**:

$$G(s) = \frac{c_{A2}(s)}{c_{A1}(s)} \quad (21.)$$

Riarrangiamo l'eq. 20 e sostituiamola nella eq. 21:

$$G(s) = \frac{c_{A2}(s)}{c_{A1}(s)} = (1 - b)e^{-tDs} + b \quad (22.)$$