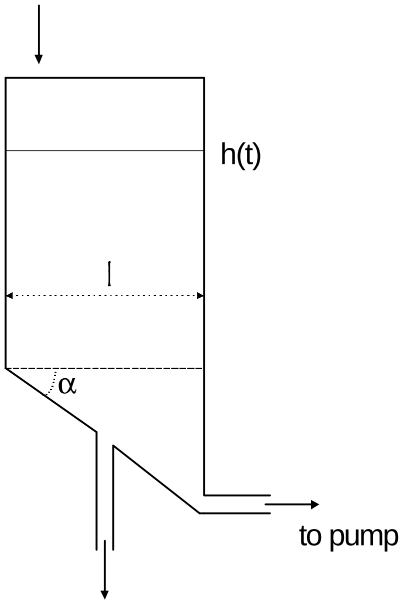
Problema del 24/07/2001

Un **serbatoio** a sezione quadrata ($l \cdot l$) ed a fondo inclinato (v. sez. verticale in figura) viene utilizzato per la raccolta di un liquido sporco da operazioni di lavaggio.
Il liquido entra dall'alto con portata volumetrica $\dot{V}_i$, esce al centro del fondo inclinato con portata volumetrica $\dot{V}_o$ dipendente dal battente h(t), e viene anche prelevato con portata volumetrica $\dot{V}_p$ da una pompa attraverso uno tubo orizzontale posizionato sul punto più basso del fondo.

IPOTESI:
•Il pelo libero del liquido si può ritenere sempre orizzontale;
•Il sistema è isotermo.



a. scrivere il **bilancio di materia** in **stazionario**
b. scrivere il modello matematico **dinamico**
c. **classificare** il modello matematico **dinamico** così ottenuto
d. individuare **variabili di ingresso**, **stato** ed **uscita**, nonché i **parametri** del modello
e. discutere quali tra le variabili di ingresso possano essere prese come **funzioni forzanti** e ragionevolmente di che tipo, vista la natura del problema
f. esprimere il modello lineare o linearizzato in **variabili di deviazione**

Se la portata volumetrica che esce al centro del fondo inclinato dipende dalla radice quadrata del battente h(t)
g. descrivere un **metodo di linearizzazione** ed effettuare la linearizzazione

SOLUZIONE

a. Bilancio di materia in stazionario

$$IN - OUT = 0$$

$$\rho \cdot V_{punto\_is} - \rho \cdot \left(V_{punto\_os} + V_{punto\_ps}\right) = 0$$

b. Bilancio di materia dinamico

$$IN \quad - \quad OUT \quad = \quad ACC$$

$$\rho \cdot V_{punto\_i} - \rho \cdot \left(V_{punto\_o} + V_{punto\_p}\right) = \frac{dm}{dt}$$

In una ipotesi semplificativa la portata in uscita dal punto più alto può essere considerata direttamente proporzionale al battente h(t):

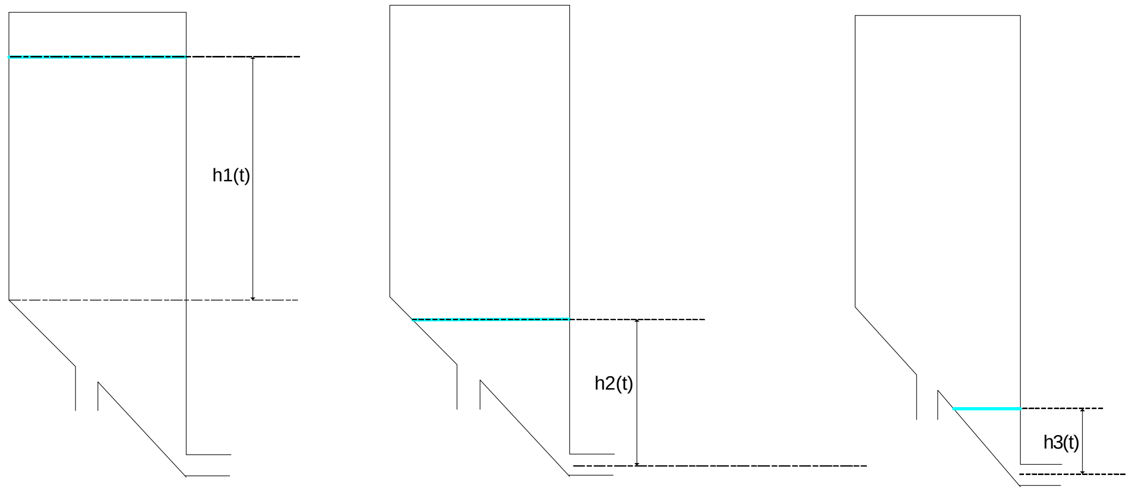
$$V_{punto\_o} = k \cdot h(t)$$

$$V_{punto\_i} - V_{punto\_o} - V_{punto\_p} = \frac{dV}{dt}$$

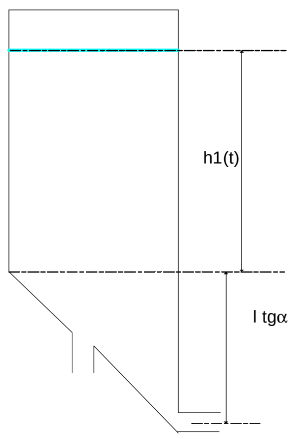
essendo per un liquido ρ = cost.

CASI POSSIBILI:

CASO 1 **CASO 2** **CASO 3**



CASO 1



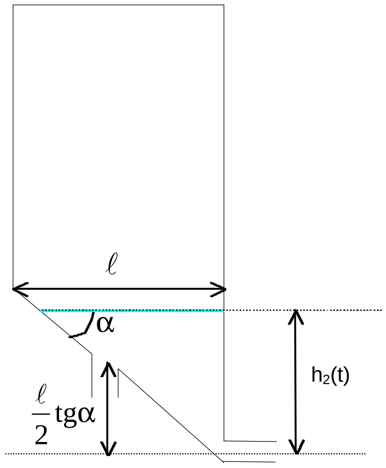
$$V = h_1(t)\cdot l^2 + l^3\cdot\frac{tg\alpha}{2}$$

$$V_{punto\_i} - V_{punto\_o} - V_{punto\_p} = \frac{dV}{dt}$$

$$V_{punto\_i} - k\cdot\left(h_1(t) + l\cdot\frac{tg\alpha}{2}\right) - V_{punto\_p} = l^2\cdot\frac{dh_1(t)}{dt}$$

$$\frac{dh_1(t)}{dt} + \frac{k}{l^2}\cdot h_1(t) = \frac{1}{l^2}\cdot V_{punto\_i} - \frac{k}{l}\cdot\frac{tg\alpha}{2} - \frac{1}{l^2}\cdot V_{punto\_p}$$

CASO 2



$$V = \frac{1}{2}h_2(t)\frac{h_2(t)}{tg\alpha}\ell = \frac{\ell(h_2(t))^2}{2tg\alpha}$$

$$V_{punto\_i} - V_{punto\_o} - V_{punto\_p} = \frac{dV}{dt}$$

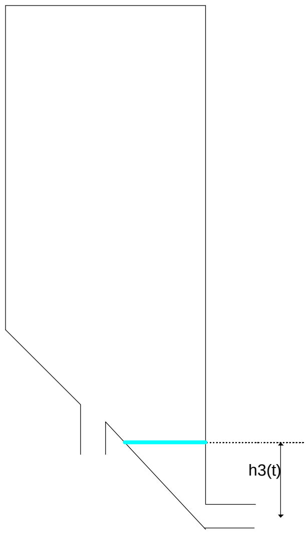
$$V_{punto\_i} - \frac{\left(h_2 - l\cdot\frac{tg\alpha}{2}\right)}{R} - V_{punto\_p} = \frac{l}{2tg\alpha}\cdot\frac{dh_2^{\,2}}{dt}$$

$$\frac{-h_2}{R} + \left(V_{punto\_i} + \frac{l}{2\cdot R}\cdot tg\alpha - V_{punto\_p}\right) = \frac{l}{2tg\alpha}\cdot\frac{dh_2^{\,2}}{dt}$$

$$-\frac{h_2}{R} + \left(V_{punto\_i} + \frac{\ell tg\alpha}{2R} - V_{punto\_p}\right) = \frac{\ell h_2}{tg\alpha}\frac{dh_2}{dt}$$

NB: dividendo 1° e 2° membro per $h_2(t)$, questa ODE presenta 2 termini del tipo $\frac{\dot{V}(t)}{h_2(t)}$; pertanto, essa richiede una procedura di linearizzazione in 2 variabili.

CASO 3



$$V = \frac{1}{2} h_3(t) \frac{h_3(t)}{tg\alpha} \ell = \frac{\ell (h_3(t))^2}{2tg\alpha}$$

$$\dot{V}_{punto\_i} - \dot{V}_{punto\_p} = \frac{dV}{dt}$$

$$\dot{V}_{punto\_i} - \dot{V}_{punto\_p} = \frac{l}{2tg\alpha} \cdot \frac{dh_3^{\ 2}}{dt}$$

$$\dot{V}_{punto\_i} - \dot{V}_{punto\_p} = \frac{l\, h_3}{tg\alpha} \cdot \frac{dh_3}{dt}$$

c. Classificazione del modello matematico dinamico così ottenuto

- Macroscopico
- caso 1: descritto da una ODE lineare, non omogenea, a coeff. costanti
- casi 2 e 3: descritti da una ODE non lineare, non omogenea, a coeff. costanti

d. Individuazione delle variabili di ingresso, stato ed uscita, nonché dei parametri del modello

- Ingresso: V_{punto_i} , V_{punto_p}
- Stato: h(t)
- Uscita: V_{punto_o} Parametri: α, l, k

e. Variabili di ingresso che possono essere prese come funzioni forzanti e tipo

•V_{punto_i} , può essere a gradino, onda quadra o a rampa (limitata !)
•V_{punto_p}, può essere a gradino , onda quadra o a rampa (limitata !)

f. Modello lineare espresso in variabili di deviazione

Un modello lineare si riscontra solo nel caso 1.
Essendo il volume del fondo a sez. triangolare sempre pieno in questo caso e, quindi, costante, la sua derivata è nulla.

Caso 1

$$V_{punto\_is} - V_{punto\_ps} - V_{punto\_os} = 0$$

Stato stazionario

$$V_{punto\_i} - V_{punto\_p} - V_{punto\_o} = \frac{l^2 dh_1}{dt}$$

Sistema dinamico

Sottraendo l'equazione descrittiva del sistema dinamico a quella relativa allo stato stazionario si ottiene:

$$\left(V_{punto\_i} - V_{punto\_is}\right) - \left(V_{punto\_p} - V_{punto\_ps}\right) - \left(V_{punto\_o} - V_{punto\_os}\right) = \frac{l^2\, d\left(h_1 - h_{1s}\right)}{dt}$$

Possiamo scrivere:

$$V_{punto\_o} - V_{punto\_os} = k\cdot\left[\left(h_1 + l\cdot\frac{tg\alpha}{2}\right) - \left(h_{1s} + l\cdot\frac{tg\alpha}{2}\right)\right]$$

$$V_{punto\_o} - V_{punto\_os} = k\cdot\left(h_1 - h_{1s}\right)$$

Dunque risulta:

$$\frac{-k}{l^2}\cdot\left(h_1 - h_{1s}\right) + \frac{1}{l^2}\cdot\left[\left(V_{punto\_i} - V_{punto\_is}\right) - \left(V_{punto\_p} + V_{punto\_ps}\right)\right] = \frac{d\left(h_1 - h_{1s}\right)}{dt}$$

In variabili deviate risulta:

$$\frac{-k}{l^2}\cdot {h_1}^{I} + \frac{1}{l^2}\cdot\left({V_{punto\_i}}^{I} - {V_{punto\_p}}^{I}\right) = \frac{d{h_1}^{I}}{dt}$$

g.
Ipotesi: la portata volumetrica che esce al centro del fondo inclinato dipende dalla radice quadrata del battente h(t)

$$IN \quad - \quad OUT \quad = \quad ACC$$

$$\rho \cdot V_{punto\_i} - \rho \cdot \left(V_{punto\_o} + V_{punto\_p} \right) = \frac{dm}{dt}$$

$$V_{punto\_i} - V_{punto\_o} - V_{punto\_p} = \frac{dV}{dt}$$

Ipotesi : $\quad V_{punto\_o} = k \cdot \sqrt{h(t)}$

$$V_{punto\_i} - k \cdot \sqrt{h(t)} - V_{punto\_p} = \frac{dV}{dt}$$

Metodo di linearizzazione e sua applicazione per il caso sopra indicato

Si può applicare come metodo di linearizzazione lo sviluppo in serie di Taylor arrestato al secondo termine intorno al valore h_s (valore di h stazionario). Il termine da linearizzare é quello sotto radice:

$$V_{punto\_i} - k \cdot \sqrt{h(t)} - V_{punto\_p} = \frac{dV}{dt}$$

$$f(x) = f\left(x_o\right) + f^{(1)}\left(x_o\right)\left(x - x_o\right)$$

$$\sqrt{h(t)} = \sqrt{h_s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{h_s}} \cdot \left(h - h_s\right)$$

Sostituendo nel CASO 1:

$$\frac{dh_1(t) \cdot l^2}{dt} + \frac{1}{\sqrt{h_s}} \cdot h = V_{punto\_i} - k \cdot \sqrt{h_s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{h_s}}$$