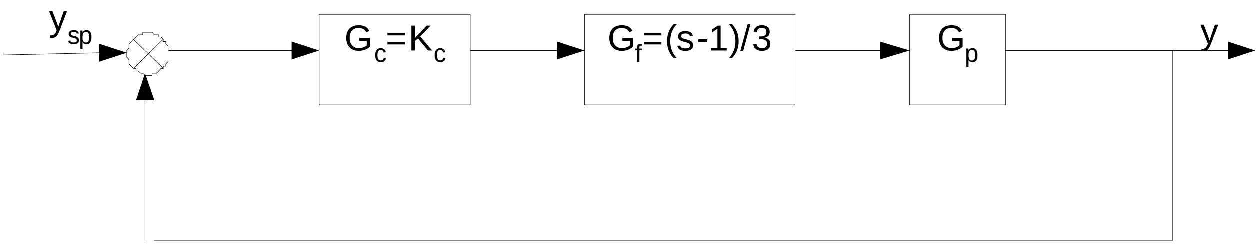
Parte B: *Root locus*

Il seguente diagramma a blocchi:



corrisponde al controllo *feedback* del processo con $G_p = \dfrac{1}{(s+1)^2\left(\frac{1}{3}s+1\right)}$ fatto con un controllore proporzionale e con un elemento finale di controllo.

1) Costruire il *root locus* rispondendo ai seguenti quesiti:

a) Derminare poli, zeri e numero di traiettorie.
b) Determinare le porzioni del *root locus* coincidenti con l'asse reale.
c) Discutere l'esistenza degli asintoti e calcolare, eventualmente, il centro di gravità e gli angoli formati con l'asse reale.
d) Calcolare gli angoli di partenza e di arrivo relativi agli zeri e ai poli multipli.
e) Sulla base delle regole precedenti stabilire l'esistenza o meno di un punto di *breakaway* e calcolarne eventualmente la posizione nel piano complesso.
f) Tracciare l'andamento **qualitativo** delle traiettorie.

g) Discutere la stabilità del sistema
h) Determinare il valore di K_c limite.

Funzione di trasferimento

$$G_{ol} = K_c\,(s - 1)/[(s + 1)^2(s + 3)]$$

M = numero degli zeri N = numero dei poli

$M := 1$ $N := 3$

$m := 1 .. M$ $n := 1 .. N$

Quesito a)

Zeri

$z_m := 1$

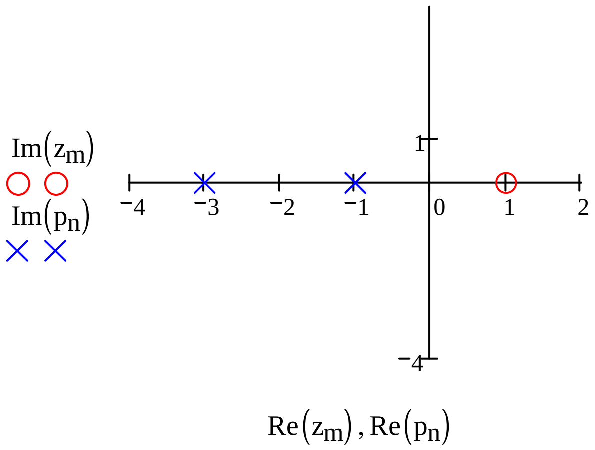
Poli

$p_n := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Il numero delle traiettorie è pari al numero dei poli, cioè 3.
Le traiettorie partono dai poli e terminano negli zeri.
Il polo -1 ha molteplicità di ordine 2: da esso partiranno due traiettorie.

Quesito b)

L'asse reale fa parte del *root locus* se, preso un punto generico, la somma del numero di poli e di zeri che si trovano a destra di tale punto è dispari. Il tratto dell'asse a sinistra di tale punto fa parte della traiettoria finchè non incontriamo un altro polo o zero sull'asse reale. Se vi sono poli o zeri di molteplicità q, essi devono essere conteggiati q volte.



Vi è una porzione di root locus sull'asse reale tra -3 e 1.

Quesito c)

Ci sono (N-M) traiettorie tali che, al crescere di K_c, tendono a valori infiniti.
Gli asintoti sono n-m rette che si diramano dal centro di gravità.

Essendo (N-M)=2, vi sono due asintoti.

Calcolo del centro di gravità

$$\gamma := \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} p_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} z_i\right)}{N - M} \qquad \gamma = -3$$

Calcolo degli angoli

Gli asintoti si dipartono dal centro di gravità formando un angolo con l'asse reale

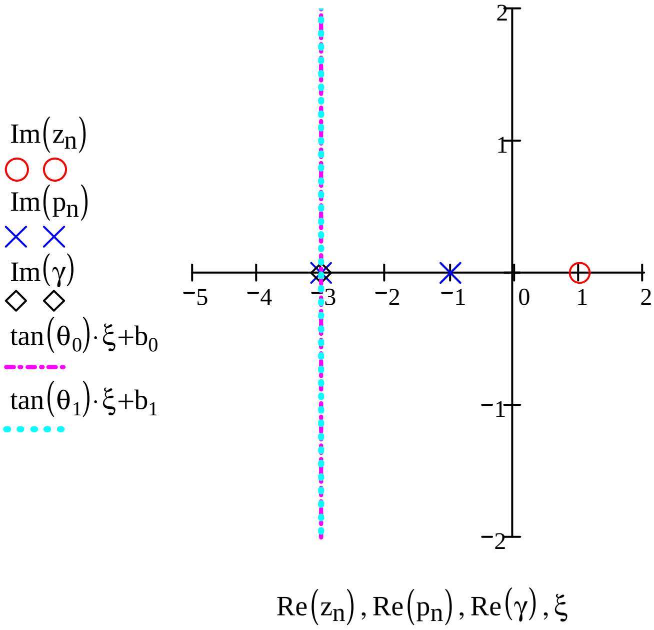
$$l := 0 .. N - M - 1$$

$$\theta_l := \pi \cdot \frac{2 \cdot l + 1}{N - M} \qquad b_l := -\gamma \cdot \tan(\theta_l)$$

$\theta_l =$

90
270

deg



Quesito d)

Le q traiettorie partenti da un polo di molteplicità q formano con l'asse reale angoli detti di partenza.
Le ν traiettorie che arrivano ad uno stesso zero di molteplicità ν formano angoli detti di arrivo.

Nel caso in esame esiste solo il polo -1 di molteplicità due.

Calcolo degli angoli di partenza

Polo -3: molteplicità 2

$$q := 2 \qquad \kappa := 0 .. q-1$$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_2 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\mathrm{signum}(p_2 - p_j))\right)}{q}$$

$$\Theta_\kappa = \begin{array}{|c|}\hline 180 \\ \hline 360 \\ \hline\end{array}\ \mathrm{deg}$$

Viene usata la funzione "signum" di MathCad per consentire il calcolo degli angoli nella Sommatoria anche quando il numero complesso è 0

Quesito e)

Il *Breakaway point* è il punto in cui due traiettorie, emergendo da due poli adiacenti (o muovendosi verso due zeri adiacenti) sull'asse reale, si intersecano e poi lasciano (o entrano) l'asse, con angoli di $\pm\pi/2$.

Calcolo del breakaway point

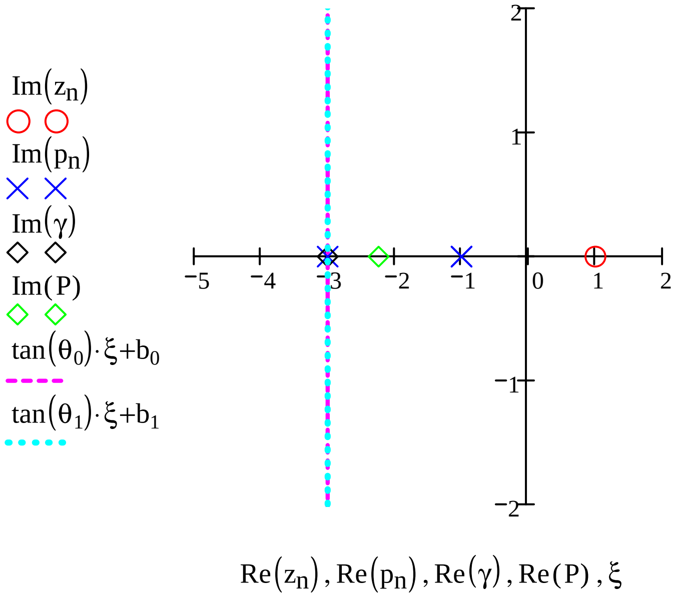
$$x := -2$$

Given

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{x - z_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{x - p_j}$$

$$P := \mathrm{Find}(x)$$

$$P = -2.236$$



Funzione di Trasferimento ad anello aperto

$$G_{OL}(s) := \frac{K_c(s-1)}{(s+1)^2(s+3)}$$

Funzione di Trasferimento ad anello chiuso

$$G_{CL}(s) := 1 + G_{OL}(s)$$

$$G_{CL}(s) := \frac{s^3 + 5s^2 + \left(7 + K_c\right)s + \left(3 - K_c\right)}{s^3 + 5s^2 + 7s + 3}$$

Assegnazione dei coefficienti del polinomio caratteristico

$$a\left(K_c\right) \equiv \begin{pmatrix} 3 - K_c \\ 7 + K_c \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tracciamento delle traiettorie sul *root locus*

Dati per il grafico

$n := N$

$Kcmax := 500$

$R := 25000$

$\omega \equiv 0 \quad \alpha \equiv 0 \quad j \equiv 0..2$

$deg \equiv \dfrac{\pi}{180} \qquad \infty \equiv 10^5$

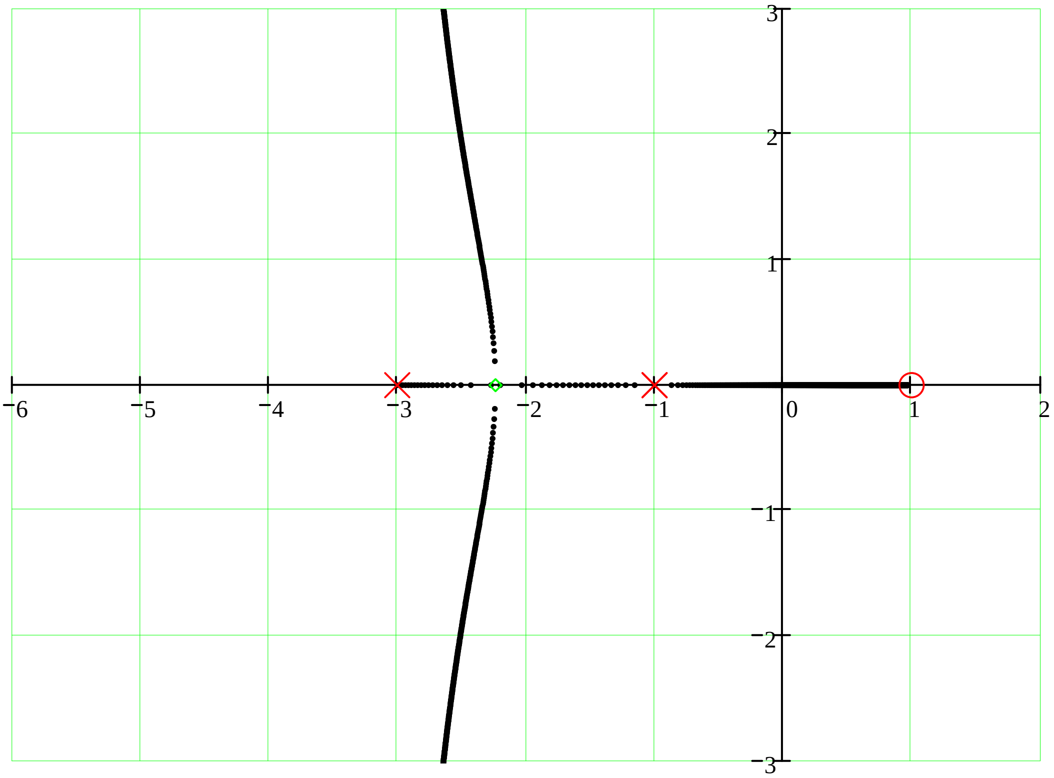
$Remin \equiv -6 \qquad Remax \equiv 2 \qquad Immax \equiv 3$

$VMin \equiv Remin - Immax \cdot \sqrt{-1} \qquad VMax \equiv Remax + Immax \cdot \sqrt{-1}$

$K_c := 0, \dfrac{Kcmax}{R} .. Kcmax \qquad i := 0..n-1$

root locus

$RLre(A) \equiv Re(polyroots(A)) \quad RLim(A) \equiv Im(polyroots(A))$



Quesito g)

Il sistema presenta una traiettoria che attraversa l'asse reale. I valori di K_c corrispondenti alla porzione di traiettoria a destra dell'asse immaginario rendono il sistema instabile.

Quesito h)

Per il calcolo del valore di K_c limite basta osservare che la traiettoria interseca l'asse reale nell'origine. Tale valore può essere determinato quindi applicando il **criterio dell'ampiezza** nel punto s=0.

Calcolo del guadagno limite

$k := 1 \qquad s := 0$

Given

$$\frac{k \cdot \prod_{i=1}^{M} |s - z_i|}{\prod_{j=1}^{N} |s - p_j|} = 1$$

$K_c := \mathrm{Find}(k)$

$K_c = 3$

Al di sopra di questo valore il sistema è instabile BIBO