Funzione di trasferimento

$G_{ol} = K_c\, (s-1)/(s+3)^2(s+1)$

M = numero degli zeri N = numero dei poli

$M := 1$ $N := 3$

$m := 1 .. M$ $n := 1 .. N$

Quesito a)

Zeri

$z_m := 1$

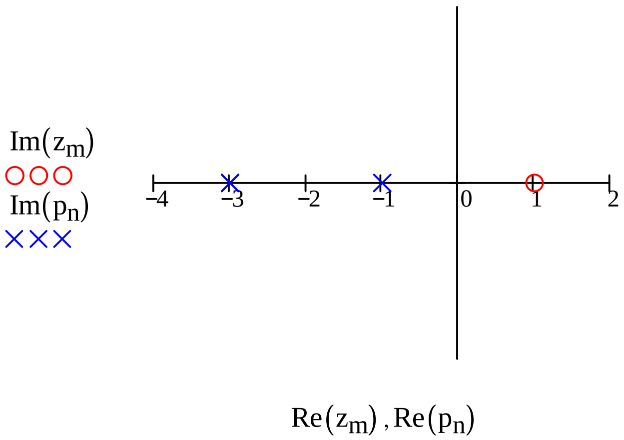
Poli

$p_n := \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Il numero delle traiettorie è pari al numero dei poli, cioè 3.
Le traiettorie partono dai poli e terminano negli zeri.
Il polo -3 ha molteplicità di ordine 2: da esso partiranno due traiettorie.

Quesito b)

L'asse reale fa parte del *root locus* se, preso un punto generico, la somma del numero di poli e di zeri che si trovano a destra di tale punto è dispari. Il tratto dell'asse a sinistra di tale punto fa parte della traiettoria finchè non incontriamo un altro polo o zero sull'asse reale. Se vi sono poli o zeri di molteplicità q, essi devono essere conteggiati q volte.



Vi è una porzione di root locus sull'asse reale tra -1 e 1.

Quesito c)

Ci sono (n-m) traiettorie tali che, al crescere di K_c, tendono a valori infiniti.
Gli asintoti sono n-m rette che si diramano dal centro di gravità.
Essendo (n-m)=2, vi sono due asintoti.

Calcolo del centro di gravità

$$\gamma := \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} p_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} z_i\right)}{N - M} \qquad \gamma = -4$$

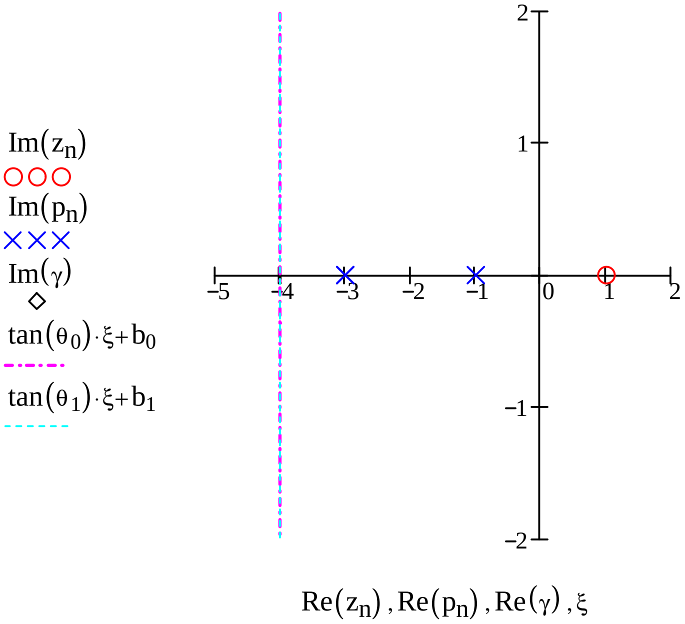
Calcolo degli angoli

Gli asintoti si dipartono dal centro di gravità formando un angolo con l'asse reale

$$l := 0 .. N - M - 1$$

$$\theta_l := \pi \cdot \frac{(2 \cdot l + 1)}{N - M} \qquad b_l := -\gamma \cdot \tan(\theta_l)$$

$$\theta_l = \begin{bmatrix} 90 \\ 270 \end{bmatrix} \text{deg}$$



Quesito d)

Le q traiettorie che partono da un polo di molteplicità q formano con l'asse reale angoli detti di partenza.
Le ν traiettorie che arrivano ad uno stesso zero di molteplicità ν formano angoli detti di arrivo.
Nel caso in esame esiste solo il polo -3 di molteplicità due.

Calcolo degli angoli di partenza

Polo -3: molteplicità 2

$q := 2 \qquad \kappa := 0 .. q-1$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_2 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\mathrm{signum}(p_2 - p_j))\right)}{q}$$

$\Theta_\kappa =$

90
270

deg

☝ Viene usata la funzione "signum" di MathCad per consentire il calcolo degli angoli nella Sommatoria anche quando il numero complesso è 0

Quesito e)

Il Breakaway point è il punto in cui due traiettorie, emergendo da due poli adiacenti (o muovendosi verso due zeri adiacenti) sull'asse reale, si intersecano e poi lasciano (o entrano) l'asse, con angoli di +o- $\pi/2$.

Nel caso in esame non ci sono due traiettorie sull'asse reale che possono intersecarsi e quindi non esiste un punto di *breakaway.*

Calcolo del breakaway point

$x := 4$

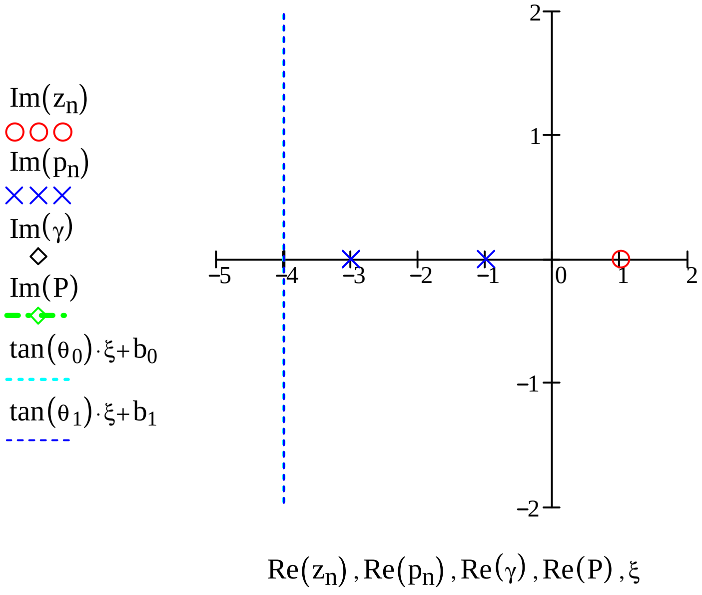
Given

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{x - z_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{x - p_j}$$

$P := \mathrm{Find}(x)$

$P = 2.562$

NB: la procedura di calcolo di MathCad effettivamente sembra calcolare un punto di *breakaway* (P = 5.562), ma esso si trova in un tratto dell'asse reale che non fa parte del root locus e quindi inaccettabile:
il *breakaway* non esiste!



Quesito g)

Il sistema presenta una traiettoria che attraversa l'asse reale. I valori di K_c corrispondenti alla porzione di traiettoria a destra dell'asse immaginario rendono il sistema instabile.

Quesito h)

Per il calcolo del valore di Kc limite basta osservare che la traiettoria interseca l'asse reale nell'origine. Tale valore può essere determinato quindi applicando il criterio dell'ampiezza nel punto s=0.

Calcolo del guadagno limite

$k := 1$ $\qquad\qquad$ $s := 0$

Given

$$\frac{k \cdot \prod_{i=1}^{M} \left| s - z_i \right|}{\prod_{j=1}^{N} \left| s - p_j \right|} = 1$$

$K_c := \mathrm{Find}(k)$

$K_c = 9$

Al di sopra di questo valore il sistema è instabile BIBO