Sezione 4 - Parte B

Parte I

Funzione di trasferimento

$$G_{ol} = K_c\,(s+2)/(s^2+2s+2)$$

M numero degli zeri e N numero dei poli

$M := 1$ $\quad N := 2$

$m := 1..M$ $\quad n := 1..N$

Zeri $\quad$ Poli

$z_m := -2$

$a := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad p := \text{polyroots}(a)$

☞ funzione di MathCad che trova le radici di un'eq. algebrica

$p_n =$

-1-i
-1+i

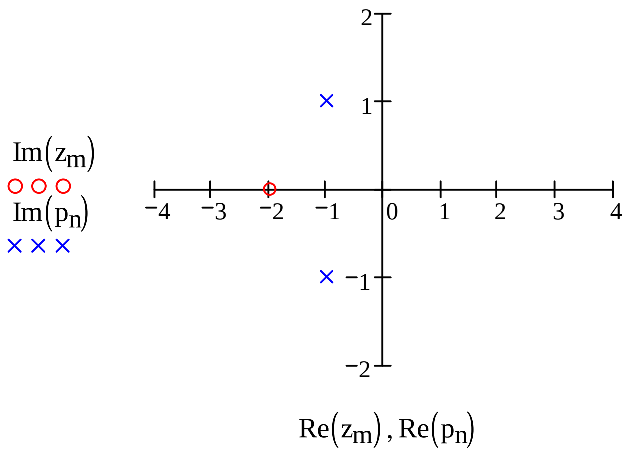
Quesito a)

Regola 1) il numero delle traiettorie è pari al numero dei poli, cioè 2

Regola 2) le traiettorie partono dai poli e terminano negli zeri. Una traiettoria termina nello ZERO z = -2

Quesito b)

Regola 3) l'asse reale fa parte del root locus se, preso un punto generico, la somma del numero di poli e di zeri che si trovano a destra di tale punto è dispari. Il tratto dell'asse a sinistra di tale punto fa parte della traiettoria finchè non incontriamo un altro polo o zero sull'asse reale. Se vi sono poli o zeri di molteplicità q, essi devono essere conteggiati q volte.



La porzione di *root locus* sull'asse reale è tra -2 e -∞.

Quesito c)

Regola 4) Gli asintoti sono (n-m) e si dipartono dal centro di gravità. n-m traiettorie al crescere di K_c tendono a valori infiniti asintotizzando su tali rette.

Essendo N - M = 1, l'asintoto è uno.

NB: nel seguito i calcoli sono svolti come nel caso generale, anche se il fatto che l'asintoto è uno solo li rende banali.

Calcolo del centro di gravità

$$\gamma := \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} p_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} z_i\right)}{N - M} \qquad \gamma = 0$$

Calcolo degli angoli degli asintoti

Gli angoli formati dagli asintoti con la direzione positiva dell'asse reale sono valutati con la regola:

$$l := 0..N - M - 1$$

$$\theta_{l+1} := \pi \cdot \frac{(2 \cdot l + 1)}{N - M}$$

$$\theta_{l+1} = \boxed{180} \ \mathrm{deg}$$

Quesito d)

Regola 6) Le traiettorie che partono da un polo di molteplicità q formano con l'asse reale angoli detti di partenza. Le traiettorie che arrivano ad uno stesso zero di molteplicità ν formano con l'asse reale angoli detti di arrivo.

Non ci sono zeri di molteplicità maggiore di uno e quindi non ci sono traiettorie che arrivano nello stesso zero.
In tal caso, vista la porzione di asse reale che fa parte del *root locus* per la regola 3, l'angolo di arrivo è necessariamente 0°.
Come controprova, la formula dà:

Zero Z1

$$\nu := 1$$

$$\kappa := 0..\nu - 1 \qquad \kappa = \boxed{0}$$

$$\Theta_{\kappa+1} := \frac{(2 \cdot \kappa + 1) \cdot \pi + \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(z_1 - p_j)\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(\mathrm{signum}(z_1 - z_i))\right)}{\nu}$$

$$\Theta_1 = 180 \, \mathrm{deg}$$

Non ci sono poli di molteplicità maggiore di uno e quindi non ci sono più traiettorie che partono dallo stesso polo.

Per i poli complessi coniugati, sono applicate le formule seguenti:

Polo $p_1 = -1 - i$

$$q := 1$$

$$\kappa := 0 .. q-1$$

$$\Theta_{\kappa+1} := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_1 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\mathrm{signum}(p_1 - p_j))\right)}{q}$$

$\Theta_{\kappa+1} =$ $\boxed{225}$ deg $\qquad \theta_1 := \Theta_1$

Polo $p_2 = -1 + i$

$$q := 1$$

$$\kappa := 0 .. q-1$$

$$\Theta_{\kappa+1} := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_2 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\mathrm{signum}(p_2 - p_j))\right)}{q}$$

$\Theta_{\kappa+1} =$ $\boxed{135}$ deg $\qquad \theta_2 := \Theta_1$

NB: come controprova, la somma degli angoli deve essere 360°: $\theta_1 + \theta_2 = 360\,\mathrm{deg}$

Quesito e)

Regola 5) Il *Breakaway point* è il punto in cui due traiettorie, provenendo da due poli adiacenti (o muovendosi verso due zeri adiacenti) sull'asse reale, si intersecano e poi lasciano (o entrano) l'asse, con angoli di +/- π/2.
Dal calcolo degli angoli di arrivo e di partenza si evince che gli unici poli da cui potrebbero partire traiettorie che si incontrano sull'asse reale sono quelli complessi.
Infatti:

Calcolo del breakaway point

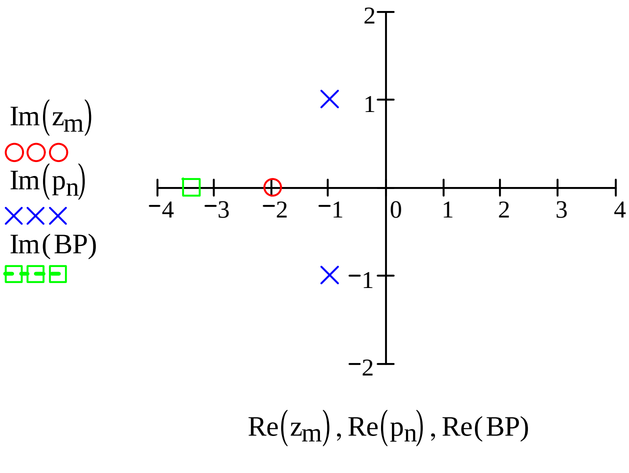
$x := -3$

Given

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{x - z_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{x - p_j}$$

$BP := \mathrm{Find}(x)$

$BP = -3.414$



Quesito g) e h)

NON Esiste alcuna traiettoria che attraversa l'asse immaginario.

Il sistema è SEMPRE stabile BIBO

Parte II

Funzione di trasferimento

$G_c = K_c\,(\tau_I s+1)/\tau_I s$

$G_{ol} = [K_c/\tau_I]\,(s+2)(\tau_I s+1)/[s(s^2+2s+2)]$

$\tau_I := 1$

M numero degli zeri e N numero dei poli

$M := 2$ $\quad N := 3$

$m := 1..M$ $\quad n := 1..N$

Zeri

$z_1 := -2$

$z_2 := -1$

Poli

$$a := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad pp := \text{polyroots}(a)$$

☞ funzione di MathCad che trova le radici di un'eq. algebrica

$p_1 := pp_1$

$p_2 := pp_2$

$p_3 := 0$

$$p = \begin{pmatrix} -1 - i \\ -1 + i \\ 0 \end{pmatrix}$$

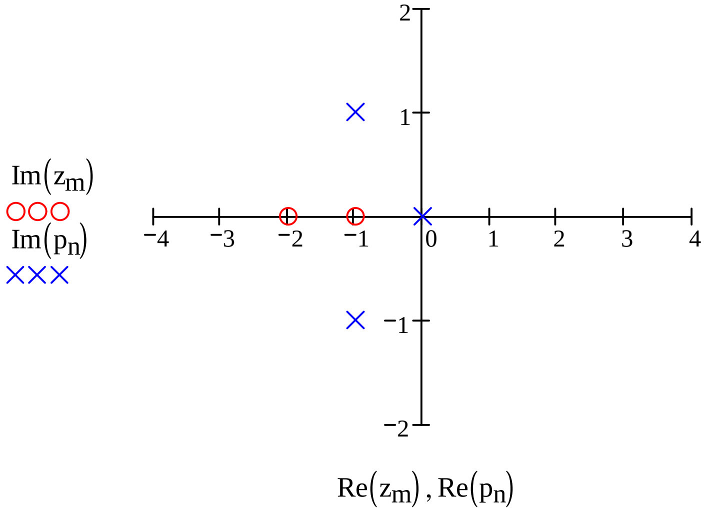
Quesito a)

Regola 1) il numero delle traiettorie è pari al numero dei poli, cioè 3

Regola 2) le traiettorie partono dai poli e terminano negli zeri. Una traiettoria termina nello ZERO z_2 = -1 ed un'altra nello ZERO z_1 = -2

Quesito b)

Regola 3) l'asse reale fa parte del root locus se, preso un punto generico, la somma del numero di poli e di zeri che si trovano a destra di tale punto è dispari. Il tratto dell'asse a sinistra di tale punto fa parte della traiettoria finchè non incontriamo un altro polo o zero sull'asse reale. Se vi sono poli o zeri di molteplicità q, essi devono essere conteggiati q volte.



La porzione di *root locus* sull'asse reale è tra 0 e -1 e poi tra -2 e -∞.

Quesito c)

Regola 4) Gli asintoti sono (n-m) e si dipartono dal centro di gravità. n-m traiettorie al crescere di K_c tendono a valori infiniti asintotizzando su tali rette.

Essendo N - M = 1, l'asintoto è uno.

NB: nel seguito i calcoli sono svolti come nel caso generale, anche se il fatto che l'asintoto è uno solo li rende banali.

Calcolo del centro di gravità

$$\gamma := \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} p_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} z_i\right)}{N - M} \qquad \gamma = 0$$

Calcolo degli angoli degli asintoti

Gli angoli formati dagli asintoti con la direzione positiva dell'asse reale sono valutati con la regola:

$$l := 0 .. N - M - 1$$

$$\theta_{l+1} := \pi \cdot \frac{(2 \cdot l + 1)}{N - M}$$

$$\theta_{l+1} = \boxed{180} \ \text{deg}$$

Quesito d)

Regola 6) Le traiettorie che partono da un polo di molteplicità q formano con l'asse reale angoli detti di partenza. Le traiettorie che arrivano ad uno stesso zero di molteplicità ν formano con l'asse reale angoli detti di arrivo.

Non ci sono zeri di molteplicità maggiore di uno e quindi non ci sono traiettorie che arrivano nello stesso zero.
In tal caso, vista la porzione di asse reale che fa parte del *root locus* per la regola 3, l'angolo di arrivo a z_2 = -1 è necessariamente 180°e l'angolo di arrivo nello ZERO z_1 = -2 è necessariamente 0°.
Come controprova, la formula dà:

Zero Z1

$$\nu := 1$$

$$\kappa := 0 .. \nu - 1$$

$$\Theta_{\kappa+1} := \frac{(2 \cdot \kappa + 1) \cdot \pi + \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(z_1 - p_j)\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(\text{signum}(z_1 - z_i))\right)}{\nu}$$

$$\Theta_{\kappa+1} = \boxed{180} \ \text{deg}$$

Non ci sono poli di molteplicità maggiore di uno e quindi non ci sono più traiettorie che partono dallo stesso polo.

Per i poli complessi coniugati, sono applicate le formule seguenti:

Polo $p_1 = -1 - i$

$$q := 1$$

$$\kappa := 0..q-1$$

$$\Theta_{\kappa+1} := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_1 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\mathrm{signum}(p_1 - p_j))\right)}{q}$$

$$\Theta_{\kappa+1} = \boxed{270}\ \mathrm{deg} \qquad \theta_1 := \Theta_1$$

Polo $p_2 = -1 + i$

$$q := 1$$

$$\kappa := 0..q-1$$

$$\Theta_{\kappa+1} := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_2 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\mathrm{signum}(p_2 - p_j))\right)}{q}$$

$$\Theta_{\kappa+1} = \boxed{90}\ \mathrm{deg} \qquad \theta_2 := \Theta_1$$

NB: come controprova, la somma degli angoli deve essere 360°: $\theta_1 + \theta_2 = 360\,\mathrm{deg}$

Quesito e)

Regola 5) Il *Breakaway point* è il punto in cui due traiettorie, provenendo da due poli adiacenti (o muovendosi verso due zeri adiacenti) sull'asse reale, si intersecano e poi lasciano (o entrano) l'asse, con angoli di +/- π/2.
Dal calcolo degli angoli di arrivo e di partenza si evince che gli unici poli da cui potrebbero partire traiettorie che si incontrano sull'asse reale sono quelli complessi.
Infatti:

Calcolo del breakaway point

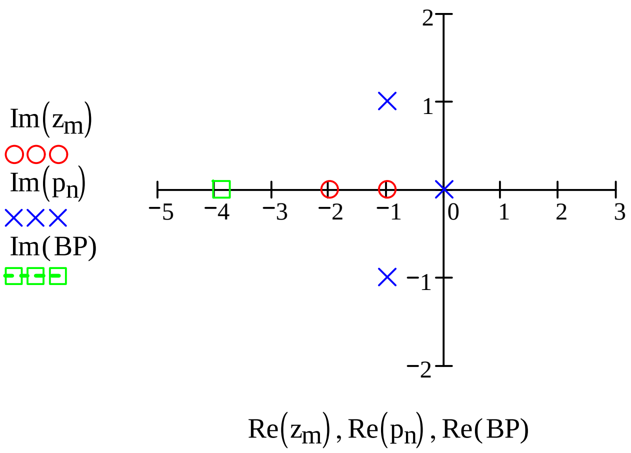
$x := -3$

Given

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{x - z_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{x - p_j}$$

$BP := \mathrm{Find}(x)$

$BP = -3.89$



Quesito g) e h)

NON Esiste alcuna traiettoria che attraversa l'asse immaginario.

Il sistema è stabile BIBO. La condizione $K_c = 0$ (POLO p_3 nell'origine) rappresenta il limite di stabilità, ma è un caso che non ha interesse pratico in quanto rappresenterebbe il sistema ad ANELLO APERTO.

Parte III

Funzione di trasferimento

$$G_c = K_c\,(\tau_D s+1)$$

$$G_{ol} = K_c\,(s+2)(\tau_D s+1)/(s^2+2s+2)$$

$\tau_D := 1$

M numero degli zeri e N numero dei poli

$M := 2$ $\quad$ $N := 2$

$m := 1..M$ $\quad$ $n := 1..N$

Zeri

$z_1 := -2$

$z_2 := -1$

Poli

$a := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $p := \mathrm{polyroots}(a)$

☜ funzione di MathCad che trova le radici di un'eq. algebrica

$p_n =$

-1-i
-1+i

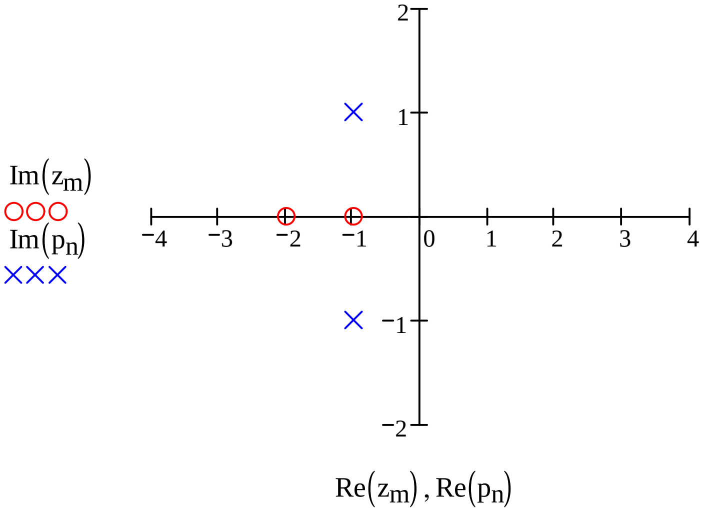
Quesito a)

Regola 1) il numero delle traiettorie è pari al numero dei poli, cioè 3

Regola 2) le traiettorie partono dai poli e terminano negli zeri. Una traiettoria termina nello ZERO $z_2 = -1$ ed un'altra nello ZERO $z_1 = -2$

Quesito b)

Regola 3) l'asse reale fa parte del root locus se, preso un punto generico, la somma del numero di poli e di zeri che si trovano a destra di tale punto è dispari. Il tratto dell'asse a sinistra di tale punto fa parte della traiettoria finchè non incontriamo un altro polo o zero sull'asse reale. Se vi sono poli o zeri di molteplicità q, essi devono essere conteggiati q volte.



La porzione di *root locus* sull'asse reale è tra -1 e -2.