Funzione di trasferimento

$$G_{ol} = K\,(s+0.5)/(s-p)(s+1)$$

Parte 1

M numero degli zeri

$M := 1$

$m := 1..M$

Zeri

$z_m := -0.5$

N numero dei poli

$N := 2$

$n := 1..N$

Poli

Poniamo per semplicità: $p := 1$

$$p_n := \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix}$$

Quesito a)

Regola 1) il numero delle traiettorie è pari al numero dei poli, cioè 2

$z_m =$

-0.5

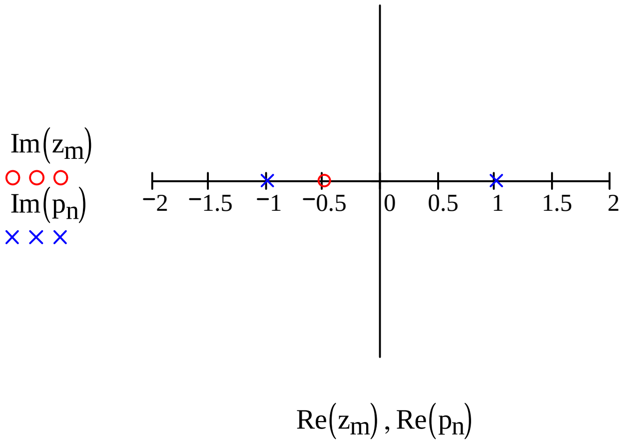
$p_n =$

1
-1

Regola 2) le traiettorie partono dai poli e terminano negli zeri. Non esiste nessun polo e nessuno zero con molteplicità maggiore di uno

Quesito b)

Regola 3) l'asse reale fa parte del root locus se, preso un punto generico, la somma del numero di poli e di zeri che si trovano a destra di tale punto è dispari. Il tratto dell'asse a sinistra di tale punto fa parte della traiettoria finchè non incontriamo un altro polo o zero sull'asse reale. Se vi sono poli o zeri di molteplicità q, essi devono essere conteggiati q volte.



Vi sono due porzioni di root locus sull'asse reale: tra 1 e -0.5; tra -1 e $-\infty$

Quesito c)

Regola 4) Gli asintoti sono (N-M) e si dipartono dal centro di gravità.
N-M traiettorie al crescere di K tendono a valori infiniti asintotizzando su tali rette.

Essendo N-M=1, vi è un solo asintoto.
Non è quindi necessario il calcolo del centro di gravità.

Calcolo dell'angolo

L'asintoto forma un angolo con l'asse reale pari a:

$$l := 0 .. N - M - 1$$

$$\theta_l := \pi \cdot \frac{(2 \cdot l + 1)}{N - M}$$

$$\theta_l =$$

$$\boxed{180} \quad deg$$

Alternativamente può essere valutato osservando che per le regole precedenti le traiettorie sono due: una sola può partire dal polo P1=1 (perchè ha molteplicità unitaria) e termina nell'unico zero esistente; l'altra, che parte dal polo P2=-1, deve necessariamente tendere a $-\infty$ e coincidere con l'asse reale (regola 3) e quindi l'angolo dell'asintoto è π.

Quesito d)

Regola 6) Le traiettorie che partono da un polo di molteplicità q formano con l'asse reale angoli detti di partenza. Le traiettorie che arrivano ad uno stesso zero di molteplicità ν formano con l'asse reale angoli detti di arrivo.

Non ci sono poli di molteplicità maggiore di uno e quindi non ci sono più traiettorie che partono dallo stesso polo.

Non ci sono poli complessi: ciascuna traiettoria parte da un polo reale deve muoversi sull'asse reale, quindi con un angolo che è 0 o 180°.
Per la regola 3, le porzioni di root locus che fanno parte dell'asse reale sono tali che le due traiettorie devono necessariamente avere un angolo di partenza pari a π partendo da P1 e P2.

Non ci sono zeri di molteplicità maggiore di uno e quindi non ci sono traiettorie che arrivano nello stesso zero.
Anche in tal caso quindi l'angolo di arrivo per la regola 3 è necessariamente 0.

Alternativamente possono essere applicate le formule seguenti:

Polo P1

$$q := 1$$

$$\kappa := 0 .. q-1$$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_1 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\mathrm{signum}(p_1 - p_j))\right)}{q}$$

$\Theta_\kappa =$

180

deg

Polo P2

$$q := 1$$

$$\kappa := 0 .. q-1$$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_2 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\mathrm{signum}(p_2 - p_j))\right)}{q}$$

$\Theta_\kappa =$

180

deg

Zero Z1

$$\nu := 1$$

$$\kappa := 0 .. \nu-1$$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(z_1 - p_j)\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(\mathrm{signum}(z_1 - z_i))\right)}{\nu}$$

$\Theta_\kappa =$

360

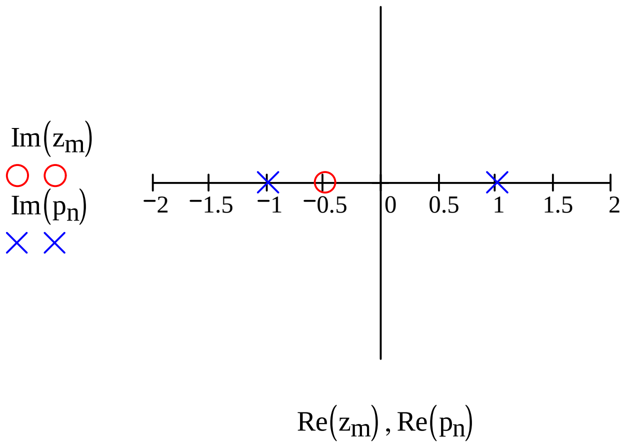
deg

Quesito e)

Regola 5) Il Breakaway point è il punto in cui due traiettorie, emergendo da due poli adiacenti (o muovendosi verso due zeri adiacenti) sull'asse reale, si intersecano e poi lasciano (o entrano) l'asse, con angoli di $\pm\pi/2$.

In tal caso non esiste il punto di Breakaway perchè non esistono né poli né zeri adacenti.

Quesito f)



Le due traiettorie root locus sono sull'asse reale: tra 1 e -0.5; tra -1 e $-\infty$

Quesito g) e h)

Esiste un'unica traiettoria che attraversa l'asse immaginario in corrispondenza della radice "s=0" dell'eq. caratteristica. Il K limite può essere calcolato sostiuendo tale valore di s nel criterio dell'ampiezza o equivalentemente nell'equazione caratteristica.

$$s := 0$$

$$K := \frac{\prod_{j=1}^{N} \left|s - p_j\right|}{\prod_{i=1}^{M} \left|s - z_i\right|} \qquad ☞ \qquad K = 2$$

Il sistema è stabile per valori di $K > 2$

Parte 2

Zeri

$z_m := -0.5$

Poli

Poniamo: $p := -0.5$

$p_n := \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix}$

Lo zero z_1= -0.5 ed il polo p_1= -0.5 sono uguali.
La f. di trasferimento si semplifica, diviene di ordine 1 e presenta solo il polo p_2= -1

Zeri

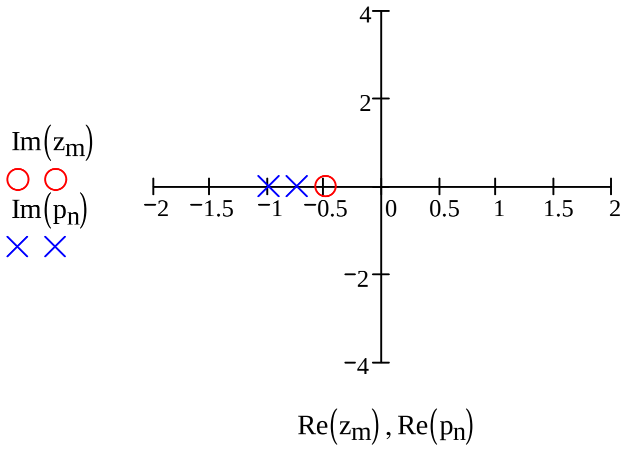
$z_m := -0.5$

Poli

Poniamo: $p := -0.75$

$p_n := \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix}$

$p_n = \begin{pmatrix} -0.75 \\ -1 \end{pmatrix}$



Le due traiettorie del root locus sono sull'asse reale: tra -0.5 e -0.75; tra -1 e $-\infty$

Zeri

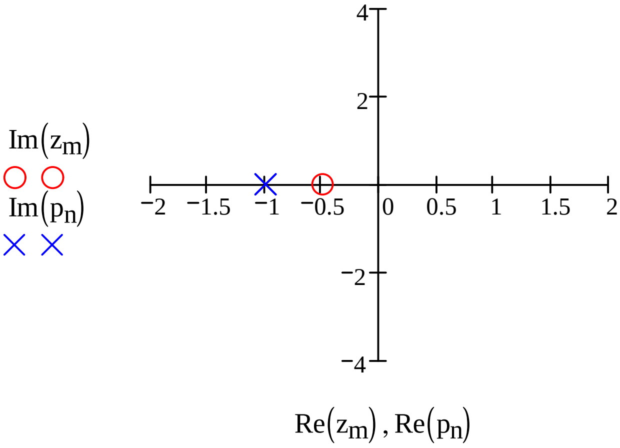
$z_m := -0.5$

Poli

Poniamo: $p := -1$

$p_n := \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix}$

$p_n = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$



Abbiamo un polo doppio a -1.
Le due traiettorie del root locus sono sull'asse reale: tra -1 e -0.5; tra -1 e $-\infty$

Zeri

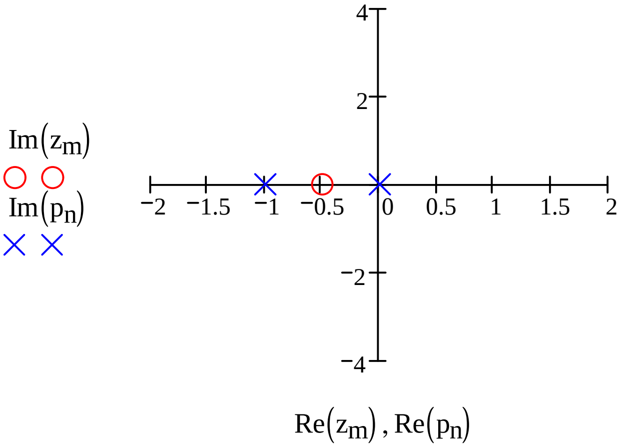
$z_m := -0.5$

Poli

Poniamo: $p := 0$

$p_n := \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix}$

$p_n = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$



Abbiamo un polo nell'origine.
Le due traiettorie del root locus sono sull'asse reale: tra 0 e -0.5; tra -1 e $-\infty$
Il sisteme è instabile BIBO ad anello aperto (ossia per K=0)