Sezione 4: STABILITÀ DEI SISTEMI DINAMICI LINEARI

Parte A: Diagrammi di Bode e Nyquist

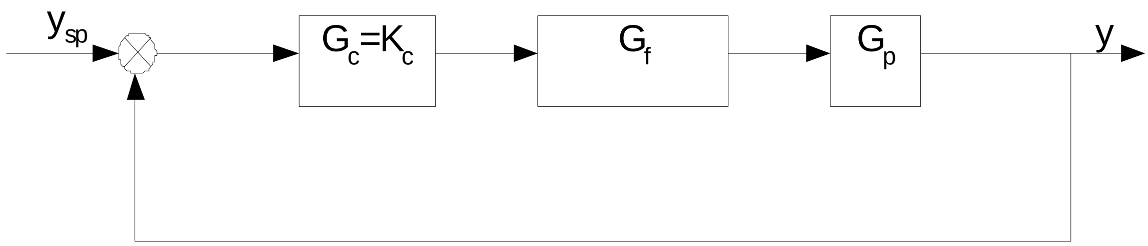
Si consideri un **sistema lineare del terzo ordine** avente la seguente funzione di trasferimento nella **configurazione ad anello aperto**:

$$G_p = \frac{1}{\left(s^2+2s+10\right)\left(s+3\right)}$$

a. Diagrammare AR, in funzione della frequenza, in scala logaritmica, con il metodo approssimato degli asintoti.
b. Diagrammare la fase ϕ in funzione della frequenza in maniera qualitativa.
c. Può questo sistema essere instabile nella **configurazione ad anello aperto** e perché?
d. Tracciare in maniera qualitativa il **diagramma di Nyquist**.
e. Enunciare il **criterio di stabilità di Nyquist**.

Parte B: *Root locus*

Il seguente diagramma a blocchi:



corrisponde al controllo *feedback* del processo di cui alla parte A, con un controllore proporzionale e con un elemento finale di controllo avente $G_f = (s-2)$.

Costruire il *root locus* rispondendo ai seguenti quesiti:

a) Determinare **poli**, **zeri** e **numero di traiettorie**.
b) Determinare le porzioni del *root locus* coincidenti con l'asse reale.
c) Discutere l'esistenza degli asintoti e calcolare, eventualmente, il centro di gravità e gli angoli formati dagli asintoti con l'asse reale.
d) Discutere o, se necessario, calcolare gli **angoli di partenza e di arrivo** relativi a poli e zeri.
e) Esiste o meno un punto di *breakaway*?
f) Tracciare l'andamento qualitativo delle traiettorie.
g) Discutere la stabilità del sistema controllato.
h) Determinare il valore di K_c limite.

Funzione di trasferimento

$$G_{ol} = K_c\,(s-2)/(s^2+2s+10)(s+3)$$

Parte 1

M numero degli zeri e N numero dei poli

$M := 1$ $\quad N := 3$

$m := 1..M$ $\quad n := 1..N$

Zeri

$z_m := 2$

Poli

$p_n :=$

$-1+3i$
$-1-3i$
-3

Quesito a)

Regola 1) il numero delle traiettorie è pari al numero dei poli, cioè 3

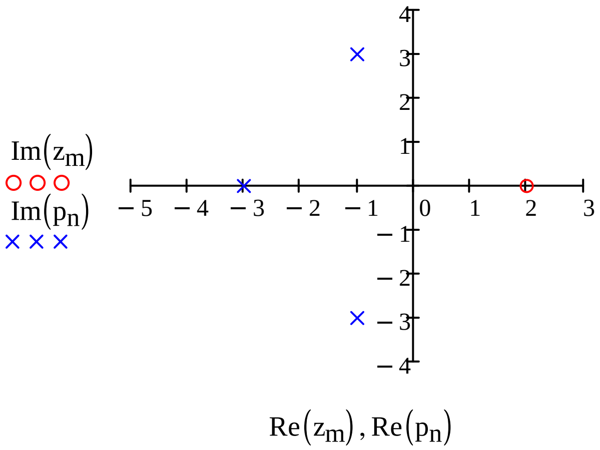
$z_m = \boxed{2}$

$$p_n = \begin{pmatrix} -1+3i \\ -1-3i \\ -3 \end{pmatrix}$$

Regola 2) le traiettorie partono dai poli e terminano negli zeri.

Quesito b)

Regola 3) l'asse reale fa parte del root locus se, preso un punto generico, la somma del numero di poli e di zeri che si trovano a destra di tale punto è dispari. Il tratto dell'asse a sinistra di tale punto fa parte della traiettoria finchè non incontriamo un altro polo o zero sull'asse reale. Se vi sono poli o zeri di molteplicità q, essi devono essere conteggiati q volte.



La porzione di *root locus* sull'asse reale è tra -3 e 2.

Quesito c)

Regola 4) Gli asintoti sono (n-m) e si dipartono dal centro di gravità. n-m traiettorie al crescere di K_c tendono a valori infiniti asintotizzando su tali rette.

Essendo N - M = 2, vi sono due asintoti.

Calcolo del centro di gravità

$$\gamma := \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} p_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} z_i\right)}{N - M}$$

$$\gamma = -3.5$$

Gli angoli che gli asintoti formano con la direzione positiva dell'asse reale può essere valutato con la regola:

Calcolo dell'angolo

Gli angoli formati dagli asintoti con l'asse reale sono pari a:

$$l := 0 .. N - M - 1$$

$$\theta_l := \pi \cdot \frac{(2 \cdot l + 1)}{N - M}$$

$$\theta_l = \begin{array}{|r|} \hline 90 \\ \hline 270 \\ \hline \end{array} \; \mathrm{deg}$$

Quesito d)

Regola 6) Le traiettorie che partono da un polo di molteplicità q formano con l'asse reale angoli detti di partenza. Le traiettorie che arrivano ad uno stesso zero di molteplicità ν formano con l'asse reale angoli detti di arrivo.

Non ci sono poli di molteplicità maggiore di uno e quindi non ci sono più traiettorie che partono dallo stesso polo.
Per il polo reale in base alla regola 3 l'angolo di partenza è necessariamente 0.

Non ci sono zeri di molteplicità maggiore di uno e quindi non ci sono traiettorie che arrivano nello stesso zero.
Anche in tal caso quindi l'angolo di arrivo per la regola 3 è necessariamente 180°.

Per i poli complessi coniugati possono essere applicate le formule seguenti:

Polo P1

$$q := 1$$

$$\kappa := 0..q-1$$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_1 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\mathrm{signum}(p_1 - p_j))\right)}{q}$$

$$\Theta_\kappa = \boxed{168.69}\ \mathrm{deg} \qquad \theta_1 := \Theta_0$$

Polo P2

$$q := 1$$

$$\kappa := 0..q-1$$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_2 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\mathrm{signum}(p_2 - p_j))\right)}{q}$$

$$\Theta_\kappa = \boxed{191.31}\ \mathrm{deg} \qquad \theta_2 := \Theta_0$$

NB: la somma degli angoli deve essere 360° $\qquad \theta_1 + \theta_2 = 360\,\mathrm{deg}$

Polo P3

$$q := 1$$

$$\kappa := 0..q-1$$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_3 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\mathrm{signum}(p_3 - p_j))\right)}{q}$$

$$\Theta_\kappa = \boxed{360}\ \mathrm{deg}$$

Zero Z1

$$\nu := 1$$

$$\kappa := 0 .. \nu - 1$$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa + 1)\cdot\pi + \left(\sum_{j=1}^{N} \arg\left(z_1 - p_j\right)\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} \arg\left(\mathrm{signum}\left(z_1 - z_i\right)\right)\right)}{\nu}$$

$$\Theta_\kappa = \boxed{180}\ \mathrm{deg}$$

Quesito e)

Regola 5) Il Breakaway point è il punto in cui due traiettorie, emergendo da due poli adiacenti (o muovendosi verso due zeri adiacenti) sull'asse reale, si intersecano e poi lasciano (o entrano) l'asse, con angoli di +/- π/2.
Dal calcolo degli angoli di arrivo e di partenza si evince che gli unici poli da cui potrebbero partire traiettorie che si incontrano sull'asse reale sono quelli complessi. Tuttavia gli angoli di partenza da questi poli sono tali per cui le traiettorie devono necessariamente allontanarsi, quindi il punto di breakaway non esiste.
Infatti:

Calcolo del breakaway point

$x := -1.5$

Given

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{x - z_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{x - p_j}$$

$P := \mathrm{Find}(x)$

$P = 4.388$

Quesito g) e h)

Esiste un'unica traiettoria che attraversa l'asse immaginario in corrispondenza della radice "s=0" dell'eq. caratteristica. Il K_c limite può essere calcolato sostiuendo tale valore di s nel criterio dell'ampiezza o equivalentemente nell'equazione caratteristica.

$s := 0$

$$K_c := \frac{\prod_{j=1}^{N} |s - p_j|}{\prod_{i=1}^{M} |s - z_i|}$$

$K_c = 15$

Il sistema è stabile per valori di $K_c < 15$