Funzione di trasferimento

$$G_{ol} = K_c\ (s+3)/(s^2+2s+10)(s-2)$$

Parte 1

M numero degli zeri e N numero dei poli

$M := 1$ $N := 3$

$m := 1..M$ $n := 1..N$

Zeri

$z_m := -3$

Poli

$p_n :=$

$-1+3i$
$-1-3i$
2

Quesito a)

Regola 1) il numero delle traiettorie è pari al numero dei poli, cioè 3

$z_m =$

-3

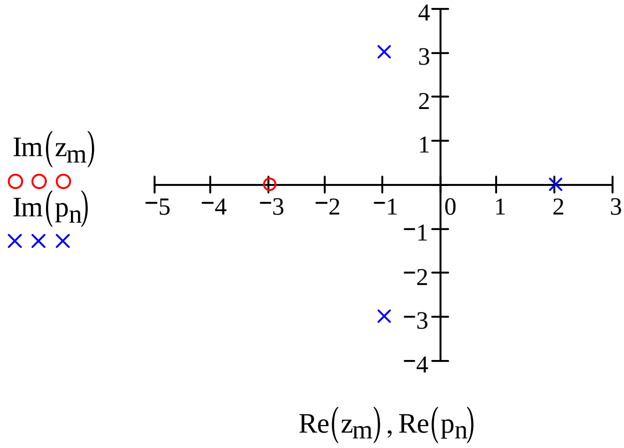
$p_n =$

-1+3i
-1-3i
2

Regola 2) le traiettorie partono dai poli e terminano negli zeri.

Quesito b)

Regola 3) l'asse reale fa parte del root locus se, preso un punto generico, la somma del numero di poli e di zeri che si trovano a destra di tale punto è dispari. Il tratto dell'asse a sinistra di tale punto fa parte della traiettoria finchè non incontriamo un altro polo o zero sull'asse reale. Se vi sono poli o zeri di molteplicità q, essi devono essere conteggiati q volte.



La porzione di *root locus* sull'asse reale è tra -3 e 2.

Quesito c)

Regola 4) Gli asintoti sono (N-M) e si dipartono dal centro di gravità. n-m traiettorie al crescere di K_c tendono a valori infiniti asintotizzando su tali rette.

Essendo N - M = 2, vi sono due asintoti.

Calcolo del centro di gravità

$$\gamma := \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} p_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} z_i\right)}{N - M}$$

$$\gamma = 1.5$$

Gli angoli che gli asintoti formano con la direzione positiva dell'asse reale può essere valutato con la regola:

Calcolo degli angoli degli asintoti

Gli angoli formati dagli asintoti con l'asse reale sono pari a:

$$l := 0 .. N - M - 1$$

$$\theta_l := \pi \cdot \frac{(2 \cdot l + 1)}{N - M}$$

$$\theta_l = \begin{array}{|r|}\hline 90 \\ \hline 270 \\ \hline \end{array} \ \mathrm{deg}$$

Quesito d)

Regola 6) Le traiettorie che partono da un polo di molteplicità q formano con l'asse reale angoli detti di partenza. Le traiettorie che arrivano ad uno stesso zero di molteplicità ν formano con l'asse reale angoli detti di arrivo.

Non ci sono poli di molteplicità maggiore di uno e quindi non ci sono più traiettorie che partono dallo stesso polo.
Per il polo reale in base alla regola 3 l'angolo di partenza è necessariamente 0.

Non ci sono zeri di molteplicità maggiore di uno e quindi non ci sono traiettorie che arrivano nello stesso zero.
Anche in tal caso quindi l'angolo di arrivo per la regola 3 è necessariamente 180°.

Per i poli complessi coniugati possono essere applicate le formule seguenti:

Polo P1

$$q := 1$$

$$\kappa := 0 .. q-1$$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_1 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\mathrm{signum}(p_1 - p_j))\right)}{q}$$

$\Theta_\kappa =$ $\boxed{11.31}$ deg $\qquad \theta_1 := \Theta_0$

Polo P2

$$q := 1$$

$$\kappa := 0 .. q-1$$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_2 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\mathrm{signum}(p_2 - p_j))\right)}{q}$$

$\Theta_\kappa =$ $\boxed{348.69}$ deg $\qquad \theta_2 := \Theta_0$

NB: la somma degli angoli per i poli complessi coniugati deve essere 360° $\qquad \theta_1 + \theta_2 = 360\,\mathrm{deg}$

Polo P3

$$q := 1$$

$$\kappa := 0 .. q-1$$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_3 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\mathrm{signum}(p_3 - p_j))\right)}{q}$$

$\Theta_\kappa =$ $\boxed{180}$ deg

Zero Z1

$$\nu := 1$$

$$\kappa := 0..\nu - 1$$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa + 1)\cdot\pi + \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(z_1 - p_j)\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(\mathrm{signum}(z_1 - z_i))\right)}{\nu}$$

$$\Theta_\kappa =$$

$$\boxed{360} \quad \mathrm{deg}$$

Quesito e)

Regola 5) Il *Breakaway point* è il punto in cui due traiettorie, emergendo da due poli adiacenti (o muovendosi verso due zeri adiacenti) sull'asse reale, si intersecano e poi lasciano (o entrano) l'asse, con angoli di $\pm\pi/2$.
Dal calcolo degli angoli di arrivo e di partenza si evince che gli unici poli da cui potrebbero partire traiettorie che si incontrano sull'asse reale sono quelli complessi. Tuttavia gli angoli di partenza da questi poli sono tali per cui le traiettorie devono necessariamente allontanarsi, quindi il punto di breakaway non esiste.
Infatti:

Calcolo del breakaway point

$$x := 10$$

Given

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{x - z_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{x - p_j}$$

$$P := \mathrm{Find}(x)$$

$$P = 1.678 \times 10^{7}$$

NB: il punto di *breakaway* è chiaramente fuori della porzione di asse reale facente parte del *root locus.*
Quindi il punto di *breakaway* NON esiste!

Quesito g) e h)

Stabilità del sistema al crescere di K_c

criterio dell'angolo

$s := 3i$

Given

$$\left(\sum_{j=1}^{M} \arg(s - z_j)\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} \arg(s - p_i)\right) = -\pi \cdot \mathrm{rad}$$

$s_{cross} := \mathrm{Find}(s)$

$s_{cross} = -0.019 + 3.537i$

NB: questa volta il criterio dell'angolo in MathCad NON funziona bene!

eq. caratteristica ad anello chiuso

$s := 0$

Valore di 1° tentat. $K_c := 6$

Given

$$-1 = K_c \frac{\prod_{i=1}^{M} (s - z_i)}{\prod_{j=1}^{N} (s - p_j)}$$

$K_{cross1} := \mathrm{Find}(K_c)$

$K_{cross1} = 6.667$

verifica con il criterio dell'ampiezza

$s := 0$

Valore di 1° tentat. $K_c := 6$

Given

$$K_c = \frac{\prod_{j=1}^{N} |s - p_j|}{\prod_{i=1}^{M} |s - z_i|}$$

$K_{cross2} := \mathrm{Find}(K_c)$

$K_{cross2} = 6.667$

Funzione di Trasferimento ad anello chiuso

$$G_{CL}(s) = \blacksquare\, 1 + G_{OL}(s)$$

$$1 + \frac{K_c\cdot(s+3)}{\left(s^2+2\cdot s+10\right)\cdot(s-2)} \rightarrow \frac{1}{10}$$

Numeratore della Funzione di Trasferimento ad anello chiuso

$$\left(s^2+2\cdot s+10\right)\cdot(s-2)+K_c(s+3)$$

$$s^3+6\cdot s-20+K_c(s+3)$$

$$N(s) := s^3+\left(6+K_c\right)\cdot s-20+3K_c$$

Assegnazione dei coefficienti del polinomio

$$a(K) \equiv \begin{pmatrix} -20+3K \\ 6+K \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tracciamento delle traiettorie sul *root locus*

Dati per il grafico

$N := 3$

$Kcmax := 1000$

$R := 4000$

$\omega \equiv 0 \quad \alpha \equiv 0 \quad j \equiv 0..2$

$deg \equiv \frac{\pi}{180} \qquad \infty \equiv 10^4$

$Remin \equiv -3.5 \qquad Remax \equiv 2.5 \qquad Immax \equiv 8$

$VMin \equiv Remin - Immax\cdot\sqrt{-1} \qquad VMax \equiv Remax + Immax\cdot\sqrt{-1}$

NB: contatore per le traiettorie $\quad i := 0..N-1$

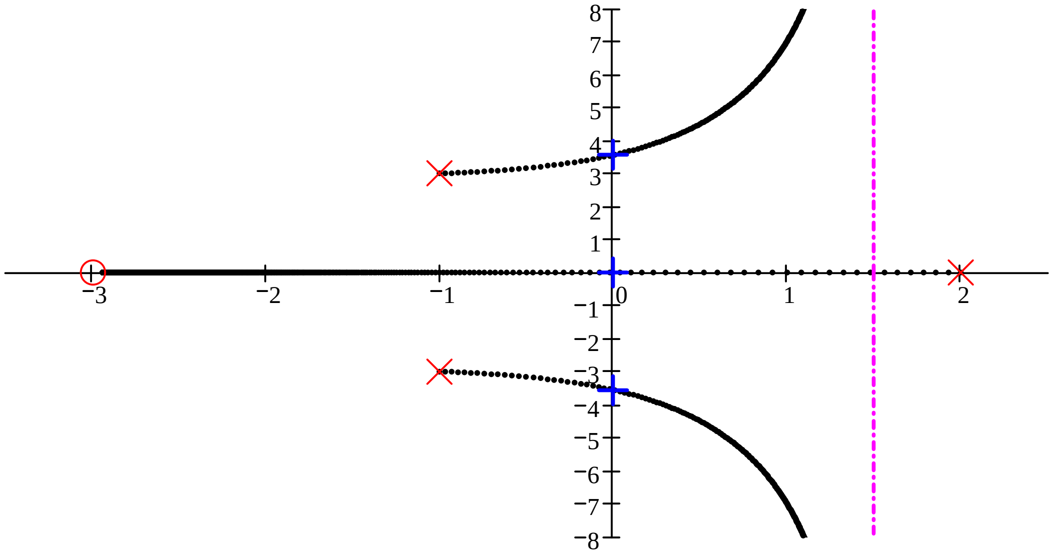
NB: contatore per le iterazioni $\quad K := 0, \frac{Kcmax}{R}..Kcmax$

Root locus

Vengono definite le seguenti funzioni per generare le coordinate delle traiettorie:
NB: x è una generica var. indipendente

$$RLre(x) \equiv Re(polyroots(x)) \qquad RLim(x) \equiv Im(polyroots(x))$$

$K_{cross2} = 6.667$



NB: Il sistema è sempre instabile BIBO per qualsiasi valore di K_c

)