Funzione di trasferimento

$$G_{ol} = K(s-2)/(s^2+6s+10)$$

Si vogliono determinare le radici dell'equazione caratteristica del sistema a ciclo chiuso al variare del guadagno K

$$1+G_{ol}=0$$

M numero degli zeri e N numero dei poli

$M := 1 \qquad N := 2$

$m := 1..M \qquad n := 1..N$

Assegnazione dei coefficienti dei polinomi

$$den := \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{polyroots}(den) = \begin{pmatrix} -3-i \\ -3+i \end{pmatrix}$$

Zeri

$z_1 := 2$

Poli

$p_1 := -3 - i$

$p_2 := -3 + i$

Regola 1) il numero delle traiettorie è pari al numero dei poli, cioè 2

$z_m =$

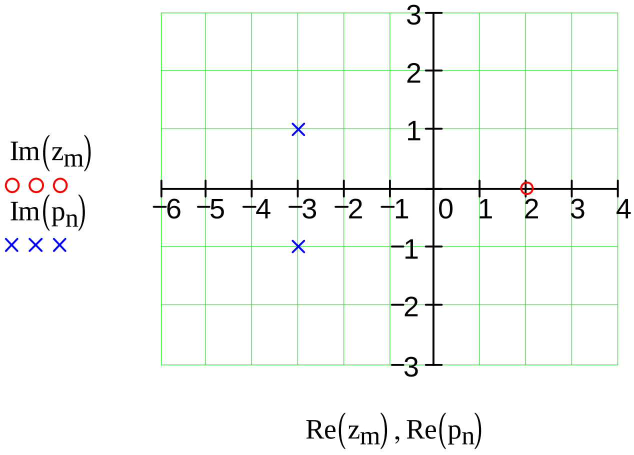
2

$p_n =$

-3-i
-3+i

Regola 2) le traiettorie partono dai poli e terminano negli zeri. Non ci sono molteplicità nè per i poli nè per gli zeri.

Regola 3) l'asse reale fa parte del root locus se, preso un punto generico, la somma del numero di poli e di zeri che si trovano a destra di tale punto è dispari. il tratto dell'asse a sinistra di tale punto fa parte della traiettoria finchè non incontriamo un altro polo o zero sull'asse reale. Se vi sono poli o zeri di molteplicità q, essi devono essere conteggiati q volte.



Vi è una porzione di root locus sull'asse reale tra 2 e -∞.

Regola 4) Ci sono (n-m) traiettorie che, al crescere di K, tendono a valori infiniti asintoticamente. Gli asintoti sono (n-m) e si dipartono dal centro di gravità. Essendo n-m=1, vi è un solo asintoto.

Calcolo del centro di gravità

$$\gamma := \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} p_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} z_i\right)}{N - M} \qquad \gamma = -8$$

Calcolo dell'angolo

L'asintoto si diparte dal centro di gravità formando un angolo con l'asse reale

$$l := 0 .. N - M - 1$$

$$\theta_l := \pi \cdot \frac{(2 \cdot l + 1)}{N - M} \qquad \theta_l = \boxed{180} \text{ deg}$$

L'asintoto è parallelo all'asse reale

Regola 5) Il Breakaway point è il punto in cui due traiettorie, emergendo da due poli adiacenti (o muovendosi verso due zeri adiacenti) sull'asse reale, si intersecano e poi lasciano (o entrano) l'asse, con angoli di $\pm\pi/2$.

Calcolo del breakaway point

Valore di 1° tentativo: $x := -3$

Given

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{x - z_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{x - p_j}$$

$P := \text{Find}(x)$

$P = -3.099$

Regola 6) Le traiettorie che partono da un polo di molteplicità q sono sfalsate da angoli dettidi partenza.Le traiettorie che arrivano ad uno stesso zero di molteplicità ν sono sfalsate da angoli detti di arrivo.

In questo caso non ci sono molteplicità.

Calcolo degli angoli di partenza

POLO a molteplicità $q := 1$ $p_1 = -3 - i$

$\kappa := 0..q-1$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_1 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\text{signum}(p_1 - p_j))\right)}{q}$$

$\Theta_\kappa =$ $\boxed{101.31}$ deg $\quad \theta_1 := \Theta_0$

POLO a molteplicità $\quad q := 1 \quad p_2 = -3 + i$

$\kappa := 0 .. q - 1$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa + 1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_2 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\mathrm{signum}(p_2 - p_j))\right)}{q}$$

$\Theta_\kappa =$ $\boxed{258.69}$ deg $\quad \theta_2 := \Theta_0$

Controprova $\quad \theta_1 + \theta_2 = 360\,\mathrm{deg}$

Calcolo degli angoli di arrivo

ZERO a molteplicità $\nu := 1$ $z_1 = 2$

$\kappa := 0..\nu - 1$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa + 1)\cdot\pi + \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(z_1 - p_j)\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(\mathrm{signum}(z_1 - z_i))\right)}{\nu}$$

$\Theta_\kappa =$

$\boxed{180}$ deg

Non ci sono nè zeri nè poli di molteplicità maggiore di uno e quindi non ci sono più traiettorie che arrivano nello stesso zero o che partono dallo stesso polo.

Applicazione del criterio dell'ampiezza e Calcolo del guadagno

$s := 0$

Valore di 1° tentativo: $k := 1$

Given

$$\frac{k \cdot \prod_{i=1}^{M} |s - z_i|}{\prod_{j=1}^{N} |s - p_j|} = 1$$

$k := \mathrm{Find}(k)$

$k = 5$

Il sistema è instabile per valori di K>5

$n := 2$

$Kcmax := 100$

$R := 10000$

$\omega \equiv 0 \quad \alpha \equiv 0 \quad j \equiv 0..2eg \equiv \frac{\pi}{180}\infty \equiv 10^4$

$RLre(A) \equiv Re(polyroots(A)) \quad RLim(A) \equiv Im(polyroots(A))$

$K := 0, \frac{Kcmax}{R} .. Kcmax \qquad i := 0..n-1$

$$a(K) \equiv \begin{pmatrix} 10 - 2K \\ 6 + K \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Remin \equiv -4$$

$$Remax \equiv 3$$

$$Immax \equiv 1.5$$

$$VMin \equiv Remin - Immax \cdot \sqrt{-1}$$

$$VMax \equiv Remax + Immax \cdot \sqrt{-1}$$