Problema del 31.07.03 - Sez. 4 Parte B

Funzione di Trasferimento

$K_c := 1$

$G_c(s) := K_c\left(\frac{2}{5}s + 1\right)$ $\quad G_f(s) := \left(\frac{1}{4}\right)$ $\quad G_p(s) := \left(\frac{1}{s^2 + s + \frac{1}{4}}\right)$

NB: la Funzione di Trasferimento viene normalizzata

$$G_{OL}(s) := \frac{\frac{1}{4}\,\frac{2}{5}\,K_c\left(s + \frac{5}{2}\right)}{\left(s^2 + s + \frac{1}{4}\right)}$$

Si vogliono determinare le radici dell'equazione caratteristica del sistema a ciclo chiuso al variare del guadagno K_c

$$1+G_{ol}=0$$

M numero degli zeri e N numero dei poli

$M := 1$ $\quad N := 2$

$m := 1..M$ $\quad n := 1..N$

Assegnazione dei coefficienti dei polinomi

$$den := \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeri

Poli

$$\text{polyroots}(den) = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$z_1 := -2.5$ $\quad p_1 := -0.5$ $\quad p_2 := -0.5$

Regola 1) il numero delle traiettorie è pari al numero dei poli, cioè 2

$z_m =$

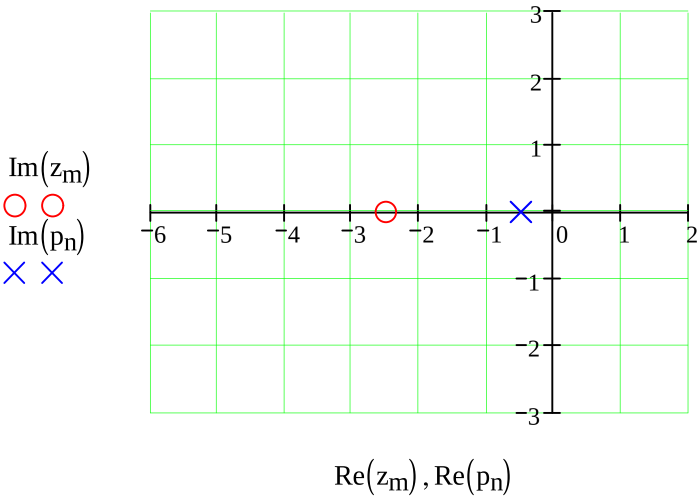
-2.5

$p_n =$

-0.5
-0.5

Regola 2) le traiettorie partono dai poli e terminano negli zeri.
Esiste una molteplicità q=2 per il polo p_n = 0.5

Regola 3) l'asse reale fa parte del root locus se, preso un punto generico, la somma del numero di poli e di zeri che si trovano a destra di tale punto è dispari. il tratto dell'asse a sinistra di tale punto fa parte della traiettoria finchè non incontriamo un altro polo o zero sull'asse reale.
Se vi sono poli o zeri di molteplicità q, essi devono essere conteggiati q volte.



Vi è 1 porzione di *root locus* sull'asse reale 2.5 e -∞.

Regola 4) Ci sono (n-m) traiettorie che, al crescere di K_c, tendono asintoticamente a valori infiniti.
Gli asintoti sono (n-m) e si dipartono dal centro di gravità.
Essendo n-m=1, vi è un solo asintoto.

Calcolo del centro di gravità

$$\gamma := \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} p_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} z_i\right)}{N - M} \qquad \gamma = 1.5$$

Calcolo dell'angolo

L'asintoto si diparte dal centro di gravità formando un angolo con l'asse reale

$$l := 0 .. N - M - 1$$

$$\theta_l := \pi \cdot \frac{(2 \cdot l + 1)}{N - M} \qquad \theta_l = \boxed{180} \ \text{deg}$$

L'asintoto è parallelo all'asse reale

Regola 5) Il *Breakaway point* è il punto in cui due traiettorie, emergendo da due poli adiacenti (o muovendosi verso due zeri adiacenti) sull'asse reale, si intersecano e poi lasciano (o entrano) l'asse, con angoli di $\pm \pi/2$.

Calcolo del breakaway point

Valore di 1° tentativo: $x := -3$

Given

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{x - z_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{x - p_j}$$

$P := \mathrm{Find}(x)$

$P = -4.5$

Regola 6) Le traiettorie che partono da un polo di molteplicità q sono sfalsate da angoli detti di partenza.
Le traiettorie che arrivano ad uno stesso zero di molteplicità ν sono sfalsate da angoli detti di arrivo.

In questo caso esiste una molteplicità q=2 per il polo $p_n = 0.5$ da cui partono 2 traiettorie simmetriche

Calcolo degli angoli di partenza

POLO p_1 a molteplicità $q := 2$

$\kappa := 0 .. q - 1$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa + 1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_1 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\mathrm{signum}(p_1 - p_j))\right)}{q}$$

$\Theta_\kappa =$

90
270

deg

Calcolo degli angoli di arrivo

ZERO z_1 a molteplicità $\quad \nu := 1$

$\kappa := 0..\nu - 1$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa + 1)\cdot\pi + \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(z_1 - p_j)\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(\mathrm{signum}(z_1 - z_i))\right)}{\nu}$$

$\Theta_\kappa =$

540

deg ☞ $\Theta_0 := 180\cdot deg$

Funzione di Trasferimento ad anello chiuso

$G_{CL}(s) := 1 + G_{OL}(s)$

$G_{CL}(s) := s^2 + \left(1 + \frac{1\cdot 2\cdot K}{4\cdot 5}\right)s + \frac{1}{4}(1 + K)$

Assegnazione dei coefficienti del polinomio

$$a(K) \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1 + K) \\ 1 + \frac{1\cdot 2\cdot K}{4\cdot 5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tracciamento delle traiettorie sul *root locus*

Dati per il grafico

$n := 2$

$Kcmax := 500$

$R := 5000$

$\omega \equiv 0 \quad \alpha \equiv 0 \quad j \equiv 0..2$

$deg \equiv \dfrac{\pi}{180} \qquad \infty \equiv 10^4$

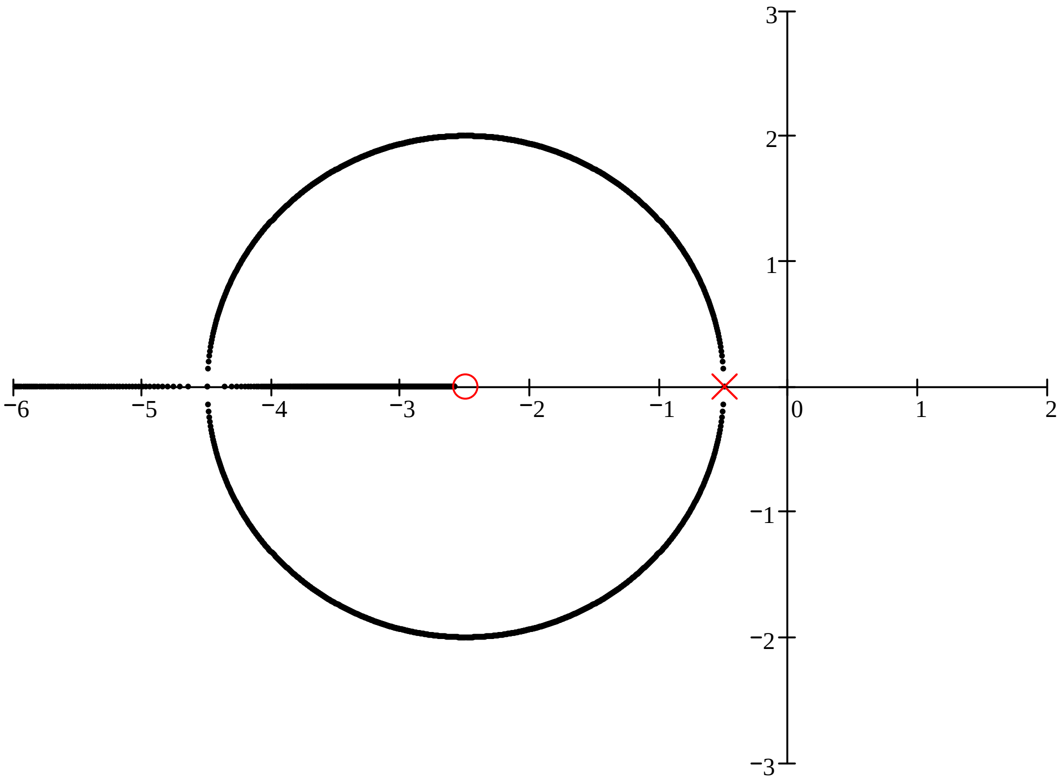
$Remin \equiv -6 \qquad Remax \equiv 2 \qquad Immax \equiv 3$

$VMin \equiv Remin - Immax\cdot\sqrt{-1} \qquad VMax \equiv Remax + Immax\cdot\sqrt{-1}$

$K := 0, \dfrac{Kcmax}{R} .. Kcmax \qquad i := 0..n-1$

root locus

$RLre(A) \equiv Re(polyroots(A)) \quad RLim(A) \equiv Im(polyroots(A))$



Stabilità del sistema al crescere di K_c.

Il sistema è sempre stabile per qualsiasi valore di K_c in quanto nessuna traiettoria attraversa l'asse immaginario al crescere di K_c.

Limite di applicabilità della tecnica del *root locus*

La funzione di trasferimento deve essere di tipo razionale e non contenere il ritardo di trasporto