Problema del 26.09.03 - Sez. 4 Parte B

Funzione di Trasferimento

$K_c := 1$

$G_{OL}=K_c\,(G_1 - G_2)$ $$G_{OL}(s) := \frac{K_c(s+2)}{(2s+1)(s+1)}$$

NB: la Funzione di Trasferimento viene portata nella forma "**poli e zeri**"

$$G_{OL}(s) := \frac{\frac{1}{2}K_c(s+2)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+1)}$$

Si vogliono determinare le radici dell'equazione caratteristica del sistema a ciclo chiuso al variare del guadagno K_c

$$1+G_{OL}=0$$

M numero degli zeri e N numero dei poli

$M := 1$ $N := 2$

$m := 1..M$ $n := 1..N$

Zeri

$z_1 := -2$

Poli

$p_1 := -0.5$ $p_2 := -1$

Regola 1) il numero delle traiettorie è pari al numero dei poli, cioè 2

$z_m =$

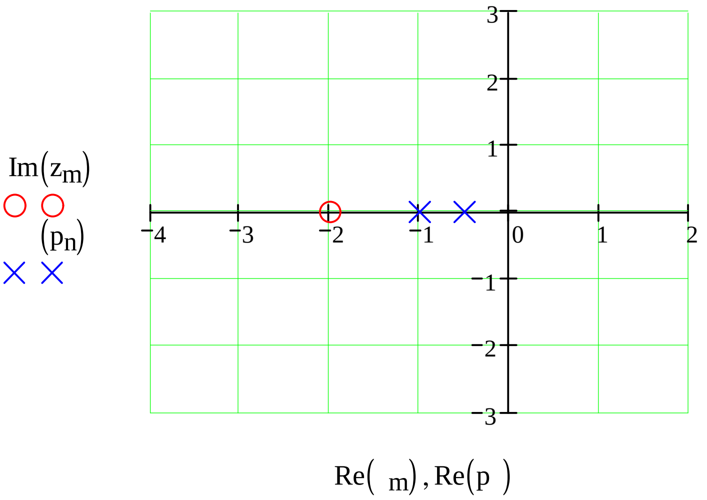
-2

$p_n =$

-0.5
-1

Regola 2) le traiettorie partono dai poli e terminano negli zeri o all'infinto.
NB: Non esistono molteplicità per poli e zeri

Regola 3) l'asse reale fa parte del root locus se, preso un punto generico, la somma del numero di poli e di zeri che si trovano a destra di tale punto è dispari. il tratto dell'asse a sinistra di tale punto fa parte della traiettoria finchè non incontriamo un altro polo o zero sull'asse reale.
Se vi sono poli o zeri di molteplicità q, essi devono essere conteggiati q volte.



root locus sull'asse reale tra -1/2 e -1; -2 e -∞

Regola 4) Ci sono (N-M) traiettorie che, al crescere di K_c, tendono asintoticamente a valori infiniti.
Gli asintoti sono (N-M) e si dipartono dal centro di gravità.
Essendo N-M=1, vi è un solo asintoto.

Calcolo del centro di gravità

$$\gamma := \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} p_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} z_i\right)}{N - M} \qquad \gamma = 0.5$$

Calcolo dell'angolo

L'asintoto si diparte dal centro di gravità formando un angolo con l'asse reale

$$l := 0 .. N - M - 1$$

$$\theta_l := \pi \cdot \frac{(2 \cdot l + 1)}{N - M} \qquad \theta_l = \boxed{180} \ \text{deg}$$

L'asintoto è parallelo all'asse reale

Regola 5) Il *Breakaway point* è il punto in cui due traiettorie, emergendo da due poli adiacenti (o muovendosi verso due zeri adiacenti) sull'asse reale, si intersecano e poi lasciano (o entrano) l'asse, con angoli di $\pm \pi/2$.

Calcolo del *breakaway* point

Valore di 1° tentativo: $x := -0.75$

Given

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{x - z_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{x - p_j}$$

$P := \mathrm{Find}(x)$

$P = -0.775$

Valore di 2° tentativo: $x := -3$

Given

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{x - z_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{x - p_j}$$

$P := \mathrm{Find}(x)$

$P = -3.225$

Essendo entrambi i valori posizionati sul luogo delle radici, esistono 2 punti di *breakaway* !

Regola 6) Le traiettorie che partono da un polo di molteplicità q sono sfalsate, rispetto al verso positivo dell'asse reale, da angoli detti **di partenza**.

Le traiettorie che arrivano ad uno stesso zero di molteplicità ν sono sfalsate, rispetto al verso positivo dell'asse reale, da angoli detti **di arrivo.**

Calcolo degli angoli di partenza

POLO p_1 a molteplicità $q := 1$

$\kappa := 0 .. q-1$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_1 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\mathrm{signum}(p_1 - p_j))\right)}{q}$$

$\Theta_\kappa =$

$\boxed{180}$ deg

POLO p_2 a molteplicità $q := 1$

$\kappa := 0 .. q-1$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_2 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\mathrm{signum}(p_2 - p_j))\right)}{q}$$

$\Theta_\kappa =$

$\boxed{0}$ deg

Calcolo degli angoli di arrivo

ZERO z_1 a molteplicità $\nu := 1$

$\kappa := 0 .. \nu-1$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(z_1 - p_j)\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(\mathrm{signum}(z_1 - z_i))\right)}{\nu}$$

$\Theta_\kappa =$

$\boxed{540}$ deg

Funzione di Trasferimento ad anello chiuso

$$G_{CL}(s) := 1 + G_{OL}(s)$$

$$G_{CL}(s) := 1 + \frac{\frac{1}{2}K_c(s+2)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+1)} \qquad \frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)\cdot(s+1) + \frac{1}{2}\cdot K_c(s+2)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)\cdot(s+1)} \qquad \frac{\left(2\cdot s^2 + 3\cdot s + 1 + K_c(s+2)\right)}{(2\cdot s+1)\cdot(s+1)}$$

Numeratore della Funzione di Trasferimento ad anello chiuso

$$N(s) := 2\cdot s^2 + \left(3 + K_c\right)\cdot s + 1 + 2K_c$$

Assegnazione dei coefficienti del polinomio caratteristico

$$a(K) \equiv \begin{bmatrix} (1+2K) \\ 3+K \\ 2 \end{bmatrix}$$

Tracciamento delle traiettorie sul *root locus*

Dati per il grafico

$n := 2$

$Kcmax := 30$

$R := 1500$

$\omega \equiv 0 \quad \alpha \equiv 0 \quad j \equiv 0..2$

$deg \equiv \frac{\pi}{180} \qquad \infty \equiv 10^4$

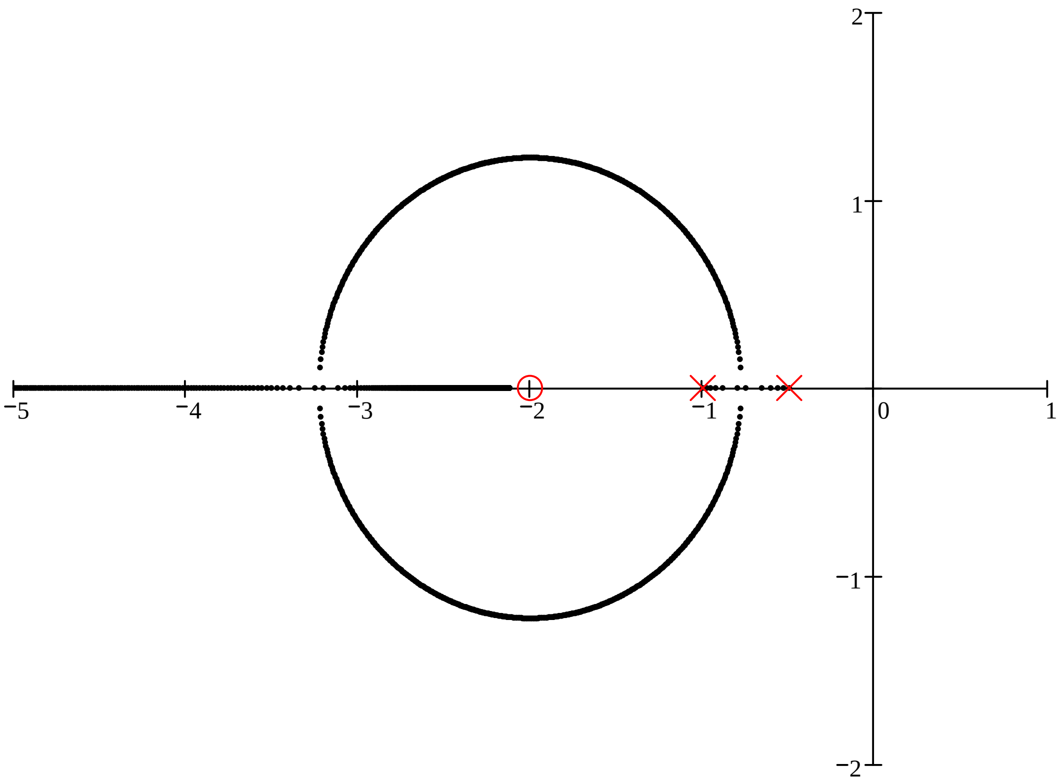
$Remin \equiv -5 \qquad Remax \equiv 1 \qquad Immax \equiv 2$

$VMin \equiv Remin - Immax\cdot\sqrt{-1} \qquad VMax \equiv Remax + Immax\cdot\sqrt{-1}$

$K := 0, \frac{Kcmax}{R} .. Kcmax \qquad i := 0..n-1$

Root locus

$$\mathrm{RLre}(A) \equiv \mathrm{Re}(\mathrm{polyroots}(A)) \quad \mathrm{RLim}(A) \equiv \mathrm{Im}(\mathrm{polyroots}(A))$$



Stabilità del sistema al crescere di K_c.

Il sistema è sempre stabile per qualsiasi valore di K_c in quanto nessuna traiettoria attraversa l'asse immaginario al crescere di K_c.

Limite di applicabilità della tecnica del *root locus*

La funzione di trasferimento deve essere di tipo razionale e non contenere il ritardo di trasporto.

i)

Funzione di Trasferimento

$K_c := 1$

$G_{OL}=K_c\,(G_1 + G_2)$ $\qquad$ $G_{OL}(s) := \dfrac{K_c(5s+4)}{(2s+1)(s+1)}$

NB: la Funzione di Trasferimento viene normalizzata

$$G_{OL}(s) := \frac{\frac{5}{2}K_c\left(s+\frac{4}{5}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+1)}$$

Si vogliono determinare le radici dell'equazione caratteristica del sistema a ciclo chiuso al variare del guadagno K_c

$$1+G_{OL}=0$$

M numero degli zeri e N numero dei poli

$M := 1$ $\qquad$ $N := 2$

$m := 1..M$ $\qquad$ $n := 1..N$

Zeri

$z_1 := -0.8$

Poli

$p_1 := -0.5$ $\qquad$ $p_2 := -1$

Regola 1) il numero delle traiettorie è pari al numero dei poli, cioè 2

$z_m =$

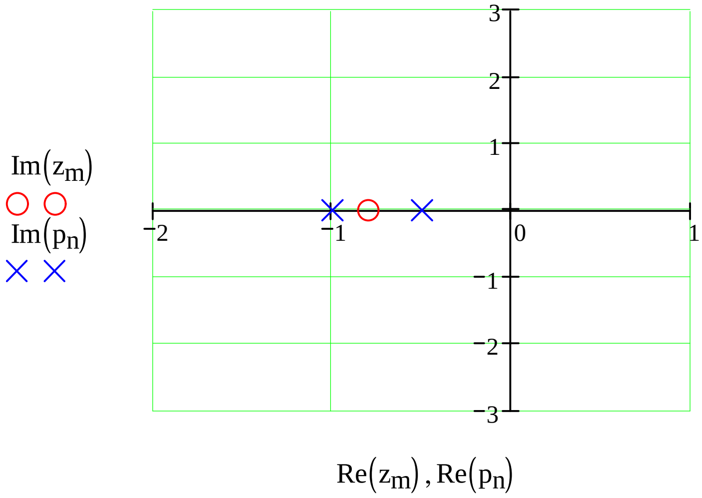
-0.8

$p_n =$

-0.5
-1

Regola 2) le traiettorie partono dai poli e terminano negli zeri.
Non esistono molteplicità per poli e zeri

Regola 3) l'asse reale fa parte del root locus se, preso un punto generico, la somma del numero di poli e di zeri che si trovano a destra di tale punto è dispari. il tratto dell'asse a sinistra di tale punto fa parte della traiettoria finchè non incontriamo un altro polo o zero sull'asse reale.
Se vi sono poli o zeri di molteplicità q, essi devono essere conteggiati q volte.



Vi è una porzione di *root locus* sull'asse reale tra -0.5 e -0.8 e poi tra -1 e -∞

Regola 4) Ci sono (n-m) traiettorie che, al crescere di K_c, tendono asintoticamente a valori infiniti.
Gli asintoti sono (n-m) e si dipartono dal centro di gravità.
Essendo n-m=1, vi è un solo asintoto.

Calcolo del centro di gravità

$$\gamma := \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} p_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} z_i\right)}{N - M} \qquad \gamma = -0.7$$

Calcolo dell'angolo

L'asintoto si diparte dal centro di gravità formando un angolo con l'asse reale

$$l := 0 .. N - M - 1$$

$$\theta_l := \pi \cdot \frac{(2 \cdot l + 1)}{N - M} \qquad \theta_l = \boxed{180}\ \text{deg}$$

L'asintoto è parallelo all'asse reale

Regola 5) Il *Breakaway point* è il punto in cui due traiettorie, emergendo da due poli adiacenti (o muovendosi verso due zeri adiacenti) sull'asse reale, si intersecano e poi lasciano (o entrano) l'asse, con angoli di $\pm\pi/2$.

Calcolo del *breakaway* point

Valore di 1° tentativo: $x := -3$

Given

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{x - z_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{x - p_j}$$

$P := \mathrm{Find}(x)$

$P = -2.517 \times 10^{6}$

Il *breakaway* NON esiste !

Regola 6) Le traiettorie che partono da un polo di molteplicità q sono sfalsate, rispetto al verso positivo dell'asse reale, da angoli detti **di partenza**.

Le traiettorie che arrivano ad uno stesso zero di molteplicità ν sono sfalsate, rispetto al verso positivo dell'asse reale, da angoli detti **di arrivo.**

Calcolo degli angoli di partenza

POLO p_1 a molteplicità $q := 1$

$$\kappa := 0..q-1$$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_1 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\mathrm{signum}(p_1 - p_j))\right)}{q}$$

$\Theta_\kappa =$

180

deg

POLO p_2 a molteplicità $q := 1$

$$\kappa := 0..q-1$$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_2 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\mathrm{signum}(p_2 - p_j))\right)}{q}$$

$\Theta_\kappa =$

180

deg

Calcolo degli angoli di arrivo

ZERO z_1 a molteplicità $\nu := 1$

$$\kappa := 0..\nu-1$$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(z_1 - p_j)\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(\mathrm{signum}(z_1 - z_i))\right)}{\nu}$$

$\Theta_\kappa =$

360

deg

Funzione di Trasferimento ad anello chiuso

$$G_{CL}(s) := 1 + G_{OL}(s)$$

$$G_{CL}(s) := 1 + \frac{\frac{5}{2}K_c\left(s+\frac{4}{5}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+1)} \quad \frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)\cdot(s+1) + \frac{5}{2}\cdot K_c\left(s+\frac{4}{5}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)\cdot(s+1)} \quad \frac{\left(2\cdot s^2 + 3\cdot s + 1 + 5\cdot K_c\left(s+\frac{4}{5}\right)\right)}{(2\cdot s+1)\cdot(s+1)}$$

Numeratore della Funzione di Trasferimento ad anello chiuso

$$N(s) := 2\cdot s^2 + \left(3 + 5K_c\right)\cdot s + 1 + 4K_c$$

Assegnazione dei coefficienti del polinomio

$$a(K) \equiv \begin{bmatrix} (1+4K) \\ 3+5K \\ 2 \end{bmatrix}$$

Tracciamento delle traiettorie sul *root locus*

Dati per il grafico

$n := 2$

$Kcmax := 20$

$R := 4000$

$\omega \equiv 0 \quad \alpha \equiv 0 \quad j \equiv 0..2$

$deg \equiv \frac{\pi}{180} \qquad \infty \equiv 10^4$

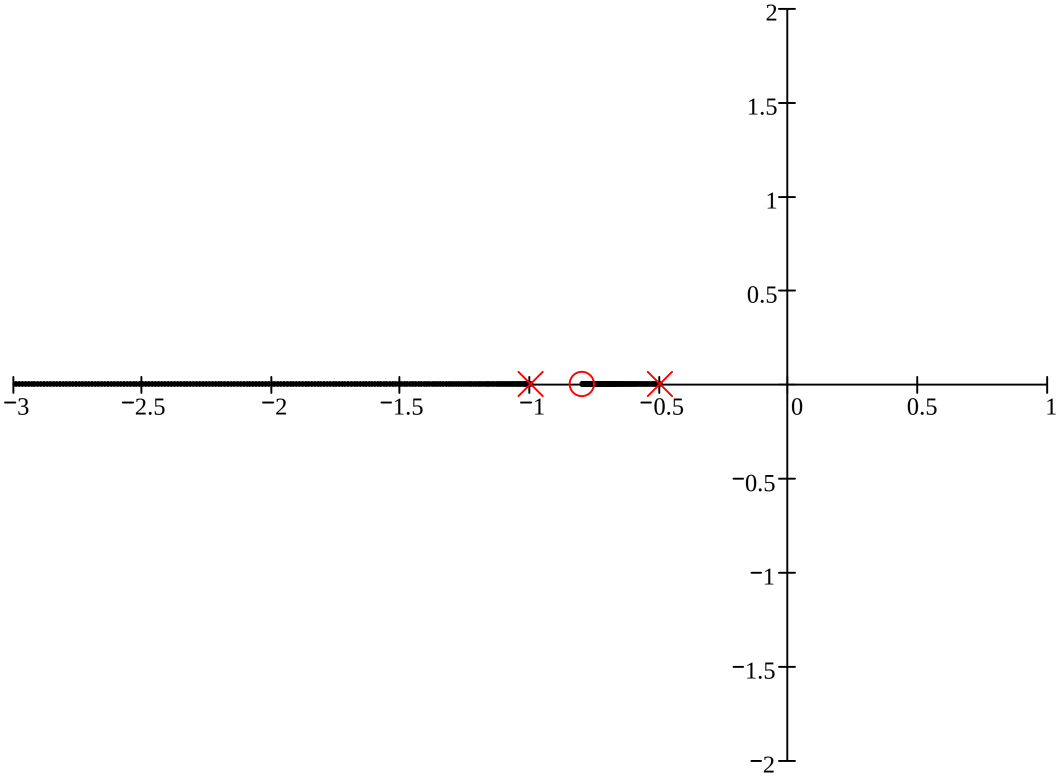
$Remin \equiv -3 \qquad Remax \equiv 1 \qquad Immax \equiv 2$

$VMin \equiv Remin - Immax\cdot\sqrt{-1} \qquad VMax \equiv Remax + Immax\cdot\sqrt{-1}$

$K := 0, \frac{Kcmax}{R} .. Kcmax \qquad i := 0..n-1$

Root locus

$$\mathrm{RLre}(A) \equiv \mathrm{Re}(\mathrm{polyroots}(A)) \qquad \mathrm{RLim}(A) \equiv \mathrm{Im}(\mathrm{polyroots}(A))$$



Stabilità del sistema al crescere di K_c.

Il sistema è sempre stabile per qualsiasi valore di K_c in quanto nessuna traiettoria attraversa l'asse immaginario al crescere di K_c.