Funzione di trasferimento

$$G_{ol} = K /(s+1)(s+2)(s+3)$$

NB: la f. di trasferimento è già nella FORMA CANONICA per il *root locus*

Si vogliono determinare le radici dell'**equazione caratteristica del sistema a ciclo chiuso** al variare del guadagno K

$$1+G_{ol}=0$$

N numero dei poli

$N := 3$

Poli (*open loop*)

$p_1 := -3$

$p_2 := -2$

$p_3 := -1$

Regola 1) il numero delle traiettorie è pari al numero dei poli, cioè 3.
Non ci sono zeri.

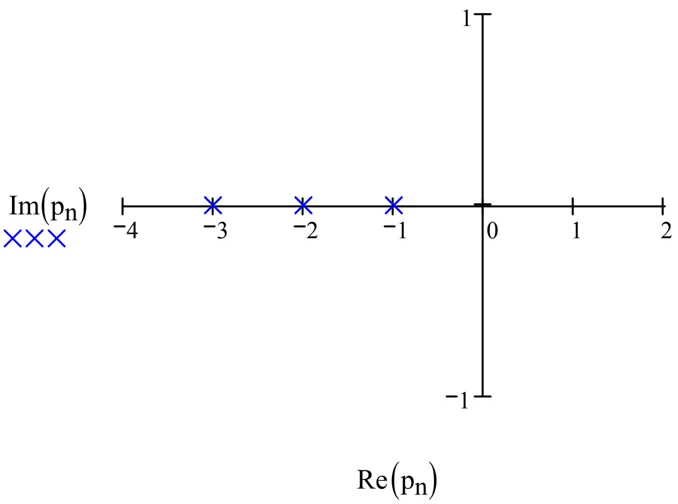
$n := 1..N$

$p_n =$

-3
-2
-1

Regola 2) le traiettorie partono dai poli, non terminano negli zeri, ma procedono all'infinito.
Non esiste nessun polo di molteplicità maggiore di uno.

Regola 3) l'asse reale fa parte del *root locus* se, preso un punto generico, la somma del numero di poli e di zeri che si trovano a destra di tale punto è dispari. Il tratto dell'asse a sinistra di tale punto fa parte della traiettoria finchè non incontriamo un altro polo o zero sull'asse reale. Se vi sono poli o zeri di molteplicità q, essi devono essere conteggiati q volte.



Vi sono due porzioni di *root locus* sull'asse reale tra -1 e -2 e tra -3 e -∞

Regola 4) Ci sono (N-M) traiettorie che, al crescere di K, tendono a valori infiniti asintoticamente. Gli asintoti sono (N-M) e si dipartono dal centro di gravità.
Essendo (N - M) = 3, vi sono tre asintoti.

Calcolo del centro di gravità

$$\gamma := \frac{\sum_{j=1}^{N} p_j}{N}$$

$$\gamma = -2$$

Calcolo degli angoli

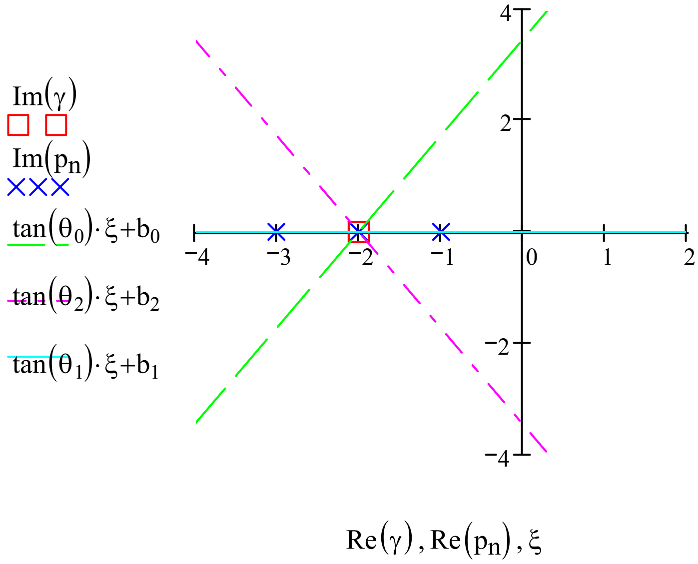
L'asintoto si diparte dal centro di gravità formando un angolo con l'asse reale positivo

$$l := 0..N-1$$

$$\theta_l := \pi \cdot \frac{2 \cdot l + 1}{N} \qquad b_l := -\gamma \cdot \tan(\theta_l)$$

$\theta_l =$

60	deg
180	
300	



Regola 5) Il *Breakaway point* è il punto in cui due traiettorie, emergendo da due poli adiacenti (o muovendosi verso due zeri adiacenti) sull'asse reale, si intersecano e poi lasciano (o entrano) l'asse, con angoli di $\pm \pi/2$.

Le traiettorie che emergono da -1 e da -2 si muovono l'una verso l'altra fino a che non si incontrano nel punto di *breakaway,* per poi allontanarsi con un angolo di $\pm \pi/2$

Calcolo del breakaway point

Valore di 1° tentativo

$x := -1.2$

Given

$$0 = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{x - p_j}$$

$P := \mathrm{Find}(x)$

$P = -1.423$

NB: l'eq. risulta in realtà di 2° grado e può essere risolta direttamente

Regola 6) Le traiettorie che partono da un polo di molteplicità q sono sfalsate da angoli dettidi partenza.Le traiettorie che arrivano ad uno stesso zero di molteplicità ν sono sfalsate da angoli detti di arrivo.

In questo esempio:

a. non ci sono poli con molteplicità >1

b. gli angoli di partenza dai poli sono 0 oppure π

Costruzione del *root locus* attraverso un metodo *trial-and-error*

a. Applicazione del criterio dell'angolo

Ricerca per tentativi della intercetta con l'asse immaginario

Assegno un valore di 1° tentativo: $s := 3.31655j$

Provo il criterio dell'angolo con k = -1 $k := -1$

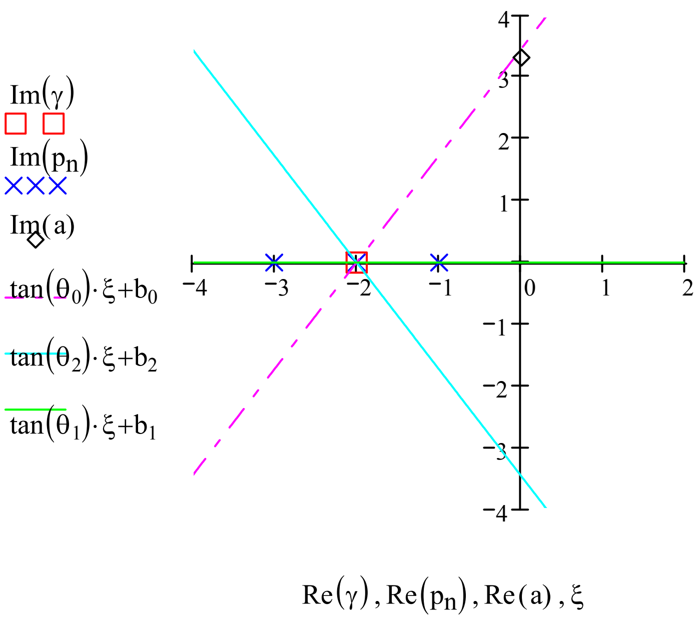
Given

$$\boxed{-\sum_{i=1}^{N} \arg(s - p_i) = (2k+1)\cdot\pi}$$

$a := \mathrm{Find}(s)$

$a = -9.48 \times 10^{-6} + 3.317j$

NB: la parte reale di **a** risulta 5 ordini di grandezza più piccola della parte immaginaria. **a** si può ritenere un num. immaginario puro.



NB: Variando il valore di tentativo nel piano complesso, si possono trovare gli altri punti delle traiettorie

b. Applicazione del criterio dell'ampiezza e Calcolo del guadagno

Il valore di $\mathbf{K_{lim}}$ per cui il sistema perde la stabilità BIBO si calcola dal criterio dell'ampiezza, entrando con il valore s=a sull'asse immaginario precedentemente calcolato col criterio dell'angolo

$a := 3.317j$

Valore di 1° tentativo: $K := 50$

Given

$$\boxed{\frac{K}{\prod_{i=1}^{N} \left|a - p_i\right|} = 1}$$

$K_{lim} := \mathrm{Find}(K)$

$K_{lim} = 60.015$