Es. 15.2 pag.191 Coughanowr

Funzione di trasferimento

$$G_{ol} = K\,(s+0.5)(s+1)/s(s+0.05)(s+0.1)(s+2)$$

NB: la Funzione di Trasferimento $G_{OL}(s)$ è già nella forma "**fattorizzata poli e zeri**"

M numero degli zeri e N numero dei poli

$M := 2$ $N := 4$

$m := 1..M$ $n := 1..N$

Zeri

$z_1 := -0.5$

$z_2 := -1$

Poli

$p_1 := -0.05$

$p_2 := -0.1$

$p_3 := -2$

$p_4 := 0$

Regola 1) il numero delle traiettorie è pari al numero dei poli, cioè 4

$z_m =$

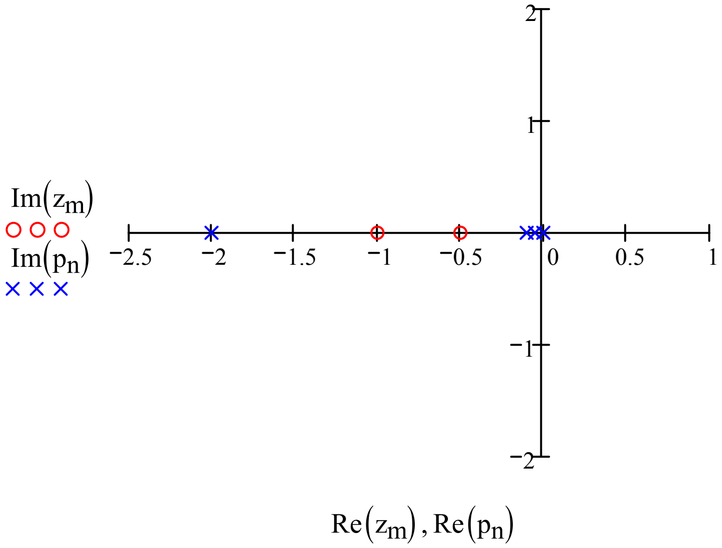
-0.5
-1

$p_n =$

-0.05
-0.1
-2
0

Regola 2) le traiettorie partono dai poli e terminano negli zeri. Non esiste nessun polo e nessuno zero con molteplicità maggiore di uno

Regola 3) l'asse reale fa parte del root locus se, preso un punto generico, la somma del numero di poli e di zeri che si trovano a destra di tale punto è dispari. Il tratto dell'asse a sinistra di tale punto fa parte della traiettoria finchè non incontriamo un altro polo o zero sull'asse reale. Se vi sono poli o zeri di molteplicità q, essi devono essere conteggiati q volte.



Vi sono tre porzioni di root locus sull'asse reale: tra 0 e -0.05; tra 0.10 e 0.5; tra -1 e -2

Regola 4) Gli asintoti sono (n-m) traiettorie tali che, al crescere di K, tendono a valori infiniti e si dipartono dal centro di gravità.
Essendo n-m=2, vi sono due asintoti.

Calcolo del centro di gravità

$$\gamma := \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} p_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} z_i\right)}{N - M}$$

$$\gamma = -0.325$$

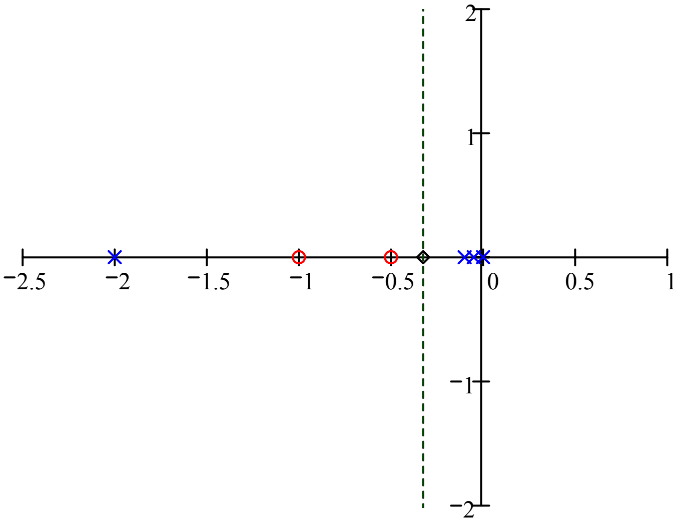
Calcolo dell'angolo

Gli asintoti si dipartono dal centro di gravità formando un angolo con l'asse reale

$$l := 0..N-M-1$$

$$\theta_l := \pi \cdot \frac{2 \cdot l + 1}{N - M} \qquad b_l := -\gamma \cdot \tan(\theta_l)$$

$$\theta_0 = 90\,\mathrm{deg} \qquad \theta_1 = 270\,\mathrm{deg}$$



Regola 5) Il Breakaway point è il punto in cui due traiettorie, emergendo da due poli adiacenti (o muovendosi verso due zeri adiacenti) sull'asse reale, si intersecano e poi lasciano (o entrano) l'asse, con angoli di +o- $\pi/2$.

Calcolo del breakaway point

$$x := -0.02$$

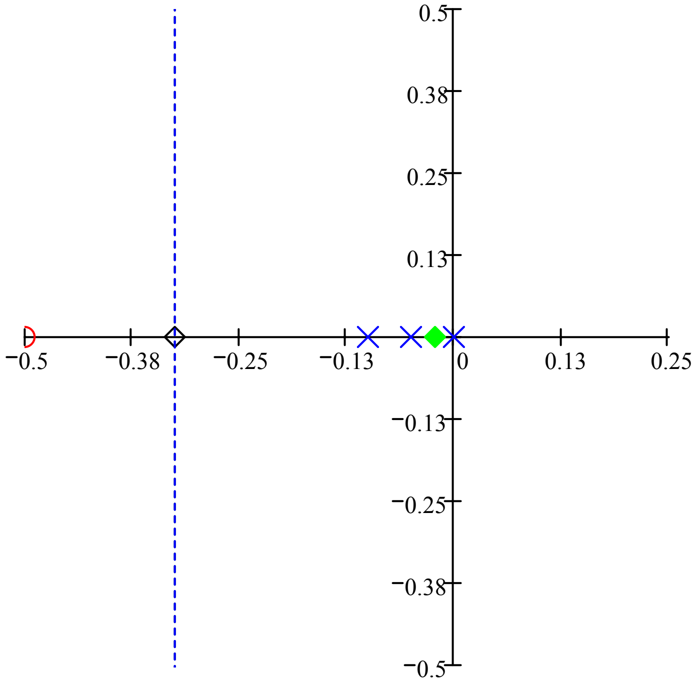
Given

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{x - z_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{x - p_j}$$

$$P := \mathrm{Find}(x)$$

$$P = -0.022$$

Esiste un punto di breakaway sull'asse reale con ascissa x = -0.022



Regola 6) Le traiettorie che partono da un polo di molteplicità q sono sfalsate da angoli dettidi partenza. Le traiettorie che arrivano ad uno stesso zero di molteplicità ν sono sfalsate da angoli detti di arrivo.

Non ci sono poli di molteplicità maggiore di uno e quindi non ci sono traiettorie che partono dallo stesso polo.

Non ci sono poli complessi: ciascuna traiettoria parte da un polo reale muovendosi sull'asse reale, quindi con un angolo che è 0 o 180°.

Non ci sono zeri di molteplicità maggiore di uno e quindi non ci sono traiettorie che arrivano nello stesso zero.

Costruzione del root locus attraverso un metodo trial-and-error: applicazione del criterio dell'angolo

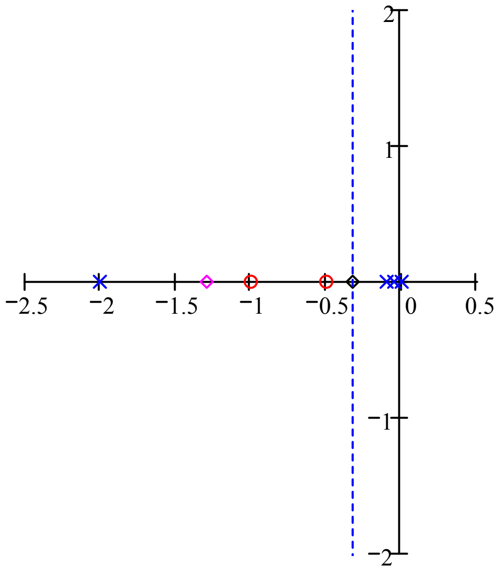
Valore di 1° tentativo

$s := -1.5 - 0.5i$ $\qquad$ $j := 0$

Given

$$\left(\sum_{i=1}^{M} \arg(s - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(s - p_j)\right) = (2j + 1)\cdot\pi$$

$a := \mathrm{Find}(s)$ ☞ $a = -1.292 - 3.744i \times 10^{-8}$



NB: variando il valore di tentativo si possono trovare altri punti delle traiettorie

Calcolo del guadagno

In corrispondenza della radice "a" dell'eq. caratteristica, prima trovata, calcoliamo ora "k".

Valore di tentativo: $K := 1$

Given

$$\frac{K \cdot \prod_{i=1}^{M} |a - z_i|}{\prod_{j=1}^{N} |a - p_j|} = 1$$

$K := \mathrm{Find}(K)$

$K = 5.848$

Procedendo in maniera simile con il criterio del guadagno, imponendo un valore di tentativo che sia IMMAGINARIO PURO, si calcola il valore di "K" per cui il sistema diventa instabile.

In questo caso il sistema è instabile per $0.6<K<360$