Funzione di trasferimento

$$G_{ol} = K\ (s^2+3s+2)/(s+1)^2(s+3)$$

Si vogliono determinare le radici dell'equazione caratteristica del sistema a ciclo chiuso al variare del guadagno K

$$1+G_{ol}=0$$

M numero degli zeri e N numero dei poli

$M := 2$ $\qquad$ $N := 3$

$m := 1 \,..\, M$ $\qquad$ $n := 1 \,..\, N$

Assegnazione dei coefficienti dei polinomi

$$num := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad den := \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$polyroots(num) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad polyroots(den) = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zeri

$z_1 := -1$

$z_2 := -2$

Poli

$p_1 := -3$

$p_2 := -1$

$p_3 := -1$

Funzione di trasferimento da studiare è:

G_{ol} = K (s+2)/(s+1)(s+3)

M numero degli zeri e N numero dei poli

$M := 1$

$m := 1 .. M$

$N := 2$

$n := 1 .. N$

Zeri

$z_1 := -2$

Poli

$p_1 := -3$

$p_2 := -1$

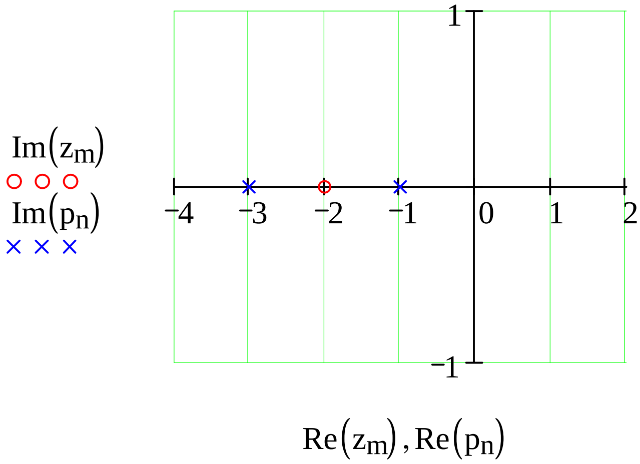
Regola 1) il numero delle traiettorie è pari al numero dei poli, cioè 2

$z_m = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$

$p_n = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

Regola 2) le traiettorie partono dai poli e terminano negli zeri. Non ci sono molteplicità nè per i poli nè per gli zeri.

Regola 3) l'asse reale fa parte del root locus se, preso un punto generico, la somma del numero di poli e di zeri che si trovano a destra di tale punto è dispari. il tratto dell'asse a sinistar d tale punto fa parte della traiettoria finchè non incontriamo un altro polo o zero sull'asse reale. Se vi sono poli o zeri di molteplicità q, essi devono essere conteggiati q volte.



Vi sono due porzioni di root locus sull'asse reale tra -1 e -2 e tra -3 e infinit

Regola 4)

Regola 4) Ci sono (n-m) traiettorie che, al crescere di K, tendono a valori infiniti asintoticamente. Gli asintoti sono (n-m) e si dipartono dal centro di grav
Essendo n-m=1, vi è un solo asintoto.

Calcolo del centro di gravità

$$\gamma := \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} p_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} z_i\right)}{N - M}$$

$$\gamma = -2$$

Calcolo dell'angolo

L'asintoto si diparte dal centro di gravità formando un angolo con l'asse reale

$$l := 0..N - M - 1$$

$$\theta_l := \pi \cdot \frac{(2 \cdot l + 1)}{N - M}$$

$$\theta_l = \boxed{180} \; deg$$

L'asintoto è parallelo all'asse reale

Regola 5) Il Breakaway point è il punto in cui due traiettorie, emergendo da due poli adiacenti (o muovendosi verso due zeri adiacenti) sull'asse reale si intersecano e poi lasciano (o entrano) l'asse, con angoli di +o- $\pi/2$.

Calcolo del breakaway point

$x := -1.5$

Given

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{x - z_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{x - p_j}$$

$P := \mathrm{Find}(x)$

$P = 1.258 \times 10^{6}$

Per qualsiasi valore di tentativo la soluzione diverge. Non esiste un punto di breakaway

Regola 6) Le traiettorie che partono da un polo di molteplicità q sono sfalsate da angoli dettidi partenza.Le traiettorie che arrivano ad uno stesso ze di molteplicità ν sono sfalsate da angoli detti di arrivo.

In questo caso non ci sono molteplicità.

Costruzione del root locus attraverso un metodo trial-and-error: applicazione del criterio dell'angolo e del criterio dell'ampiezza

Il criteriodell'angolo non dipende dal guadagno

Valore di tentativo

$s := -1.5 - 0.5i$ $\qquad$ $j := 0$

Given

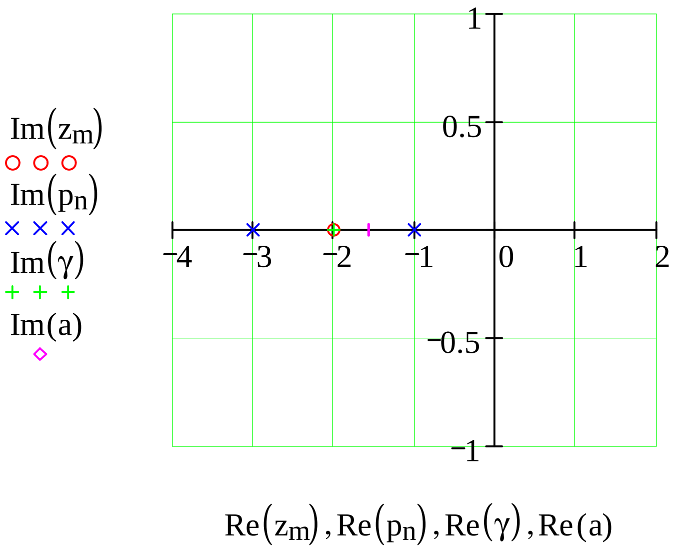
$$\left(\sum_{i=1}^{M} \arg(s - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(s - p_j)\right) = (2 \cdot j + 1) \cdot \pi$$

$\left(i = 1 \qquad\qquad \right) \quad \left(j = 1 \qquad\qquad \right)$

$a := \mathrm{Find}(s)$

$a = -1.564 - 1.415i \times 10^{-9}$

Variando il valore di tentativo si possono trovare altri punti delle traiettori



Calcolo del guadagno

$k := 1$

Given

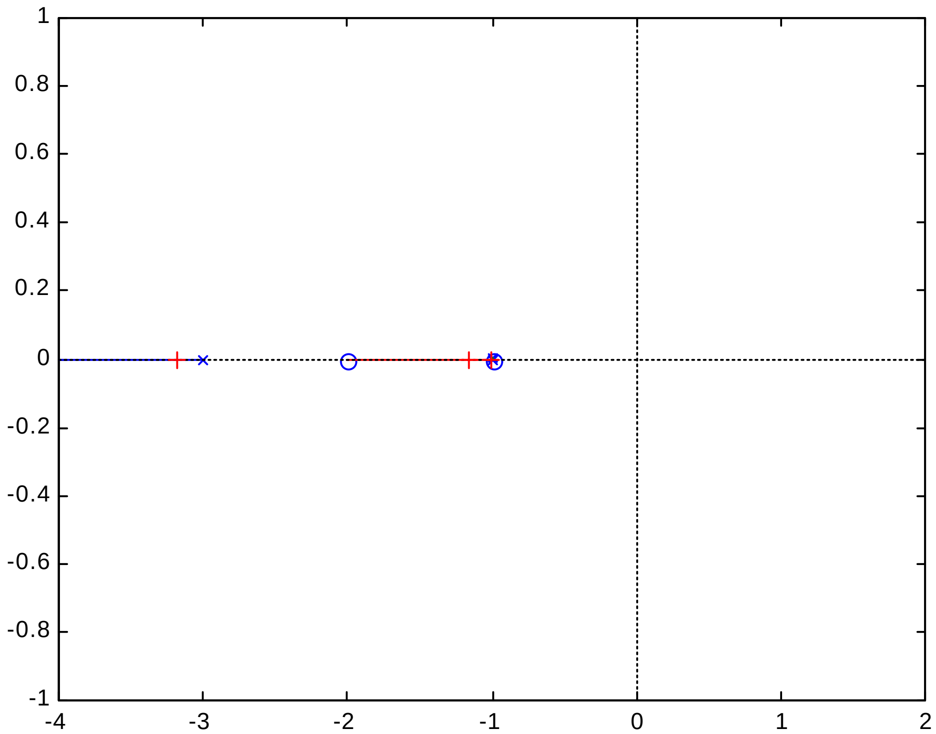
$$k \cdot \prod_{i=1}^{M} \left| a - z_i \right|$$

$$\frac{i = 1}{\prod_{j=1}^{N} \left|a - p_j\right|} = 1$$

$$k := \mathrm{Find}(k)$$

$$k = 1.859$$

Le traiettorie sono tutte disposte a sinistra dell'asse immaginario, dunque il sistema è stabile per qualunque valore di K



ità.

e,

ro