Funzione di trasferimento

$$G_{ol} = K\,(s+2)(s-0.5-2j)(s-0.5+2j)/s^3(s+1)^2(s+3-j)(s+3+j)$$

M numero degli zeri e N numero dei poli

$M := 3$ $\qquad N := 7$

$m := 1..M$ $\qquad n := 1..N$

Zeri

$z_1 := -2$

$z_2 := 0.5 + 2i$

$z_3 := 0.5 - 2i$

Poli

$p_1 := 0$

$p_2 := 0$

$p_3 := 0$

$p_4 := -1$

$p_5 := -1$

$p_6 := -3 + i$

$p_7 := -3 - i$

Regola 1) il numero delle traiettorie è pari al numero dei poli, cioè 7

$z_m =$

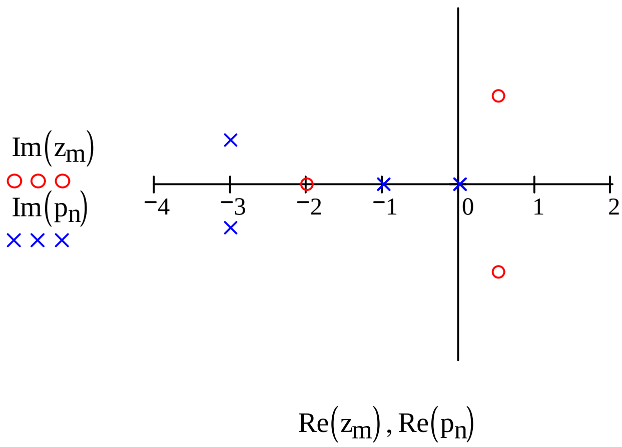
-2
0.5+2i
0.5-2i

$p_n =$

0
0
0
-1
-1
-3+1i
-3-1i

Regola 2) le traiettorie partono dai poli e terminano negli zeri. Il polo 0 ha molteplicità di ordine 3 ed ha quindi tre traiettorie che emergono da esso. Il polo -1 ha invece molteplicità di ordine 2.

Regola 3) l'asse reale fa parte del root locus se, preso un punto generico, la somma del numero di poli e di zeri che si trovano a destra di tale punto è dispari. Il tratto dell'asse a sinistra di tale punto fa parte della traiettoria finchè non incontriamo un altro polo o zero sull'asse reale. Se vi sono poli o zeri di molteplicità q, essi devono essere conteggiati q volte.



Vi è una porzione di root locus sull'asse reale tra 0 e -2

Regola 4) Ci sono (n-m) traiettorie tali che, al crescere di K, tendono a valo infiniti. Gli asintoti sono n-m rette che si diramano dal centro di gravità Essendo n-m=4, vi sono quattro asintoti.

Calcolo del centro di gravità

$$\gamma := \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} p_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} z_i\right)}{N - M}$$

$$\gamma = -1.75$$

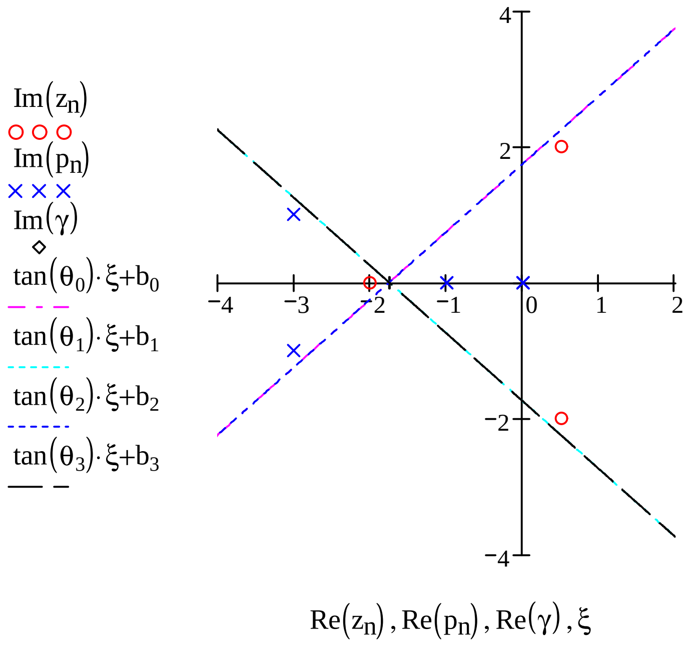
Calcolo dell'angolo

Gli asintoti si dipartono dal centro di gravità formando un angolo con l'asse reale

$$l := 0 .. N - M - 1$$

$$\theta_l := \pi \cdot \frac{(2 \cdot l + 1)}{N - M} \qquad b_l := -\gamma \cdot \tan(\theta_l)$$

$$\theta_0 = 45\,deg \qquad \theta_1 = 135\,deg \qquad \theta_2 = 225\,deg \qquad \theta_3 = 315\,deg$$



Regola 5) Il Breakaway point è il punto in cui due traiettorie, emergendo da due poli adiacenti (o muovendosi verso due zeri adiacenti) sull'asse reale, si intersecano e poi lasciano (o entrano) l'asse, con angoli di +o- $\pi/2$.

Calcolo del breakaway point

$x := -1.2$

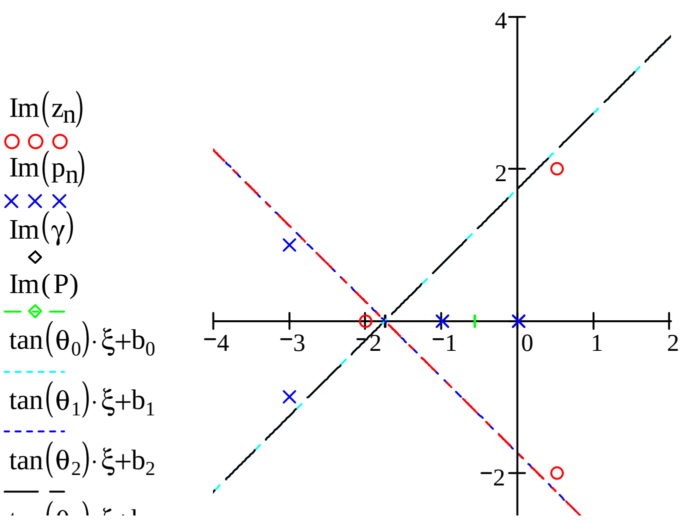
Given

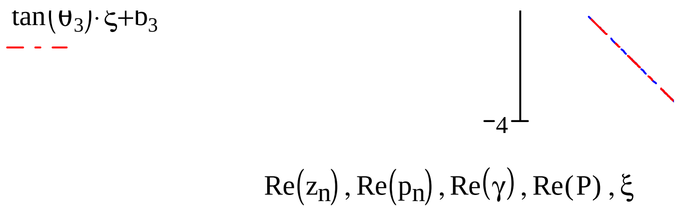
$$\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{x - z_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{x - p_j}$$

$P := \mathrm{Find}(x)$

$P = -0.58$

Esiste un punto di breakaway





Regola 6) Le traiettorie che partono da un polo di molteplicità q sono sfalsate da angoli dettidi partenza.Le traiettorie che arrivano ad uno stesso z di molteplicità ν sono sfalsate da angoli detti di arrivo.

Calcolo degli angoli di partenza

molteplicità

$q := 2$ $\qquad\qquad$ $\kappa := 0..q-1$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_2 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(p_2 - p_j)\right)}{q}$$

Non ci sono zeri di molteplicità maggiore di uno e quindi non ci sono traiettorie che arrivano nello stesso zero.

Costruzione del root locus attraverso un metodo trial-and-error: applicazione del criterio dell'angolo e della ampiezza

Valore di tentativo

$s := -1.5 - 0.5i$ $\qquad\qquad$ $j := 0$

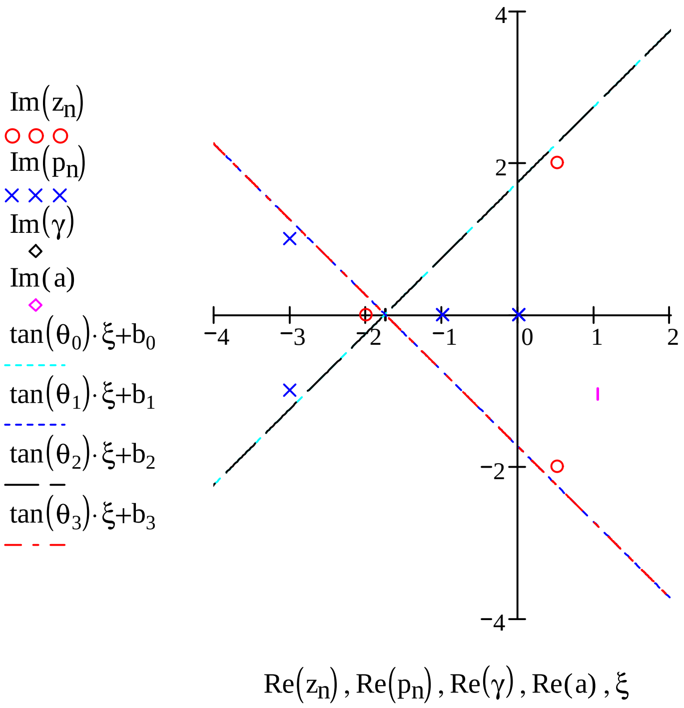
Given

$$\left(\sum_{i=1}^{M} \arg(s - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(s - p_j)\right) = (2j + 1)\cdot\pi$$

$a := \mathrm{Find}(s)$

$a = 1.031 - 1.045i$

Variando il valore di tentativo si possono trovare altri punti delle traiettorie



Calcolo del guadagno

$k := 1$

Given

$$\frac{k \cdot \prod_{i=1}^{M} \left| a - z_i \right|}{\prod_{j=1}^{N} \left| a - p_j \right|} = 1$$

$$k := \text{Find}(k)$$

$$k = 27.739$$

Al di sopra di questo valore il sistema è instabile ri

ero