Funzione di trasferimento

$$G_{ol} = K\ (s+2)(s-0.5-2i)(s-0.5+2i)/s(s+1)^2(s+3-i)(s+3+i)$$

M numero degli zeri e N numero dei poli

$M := 3$ $N := 5$

$m := 1 .. M$ $n := 1 .. N$

Zeri

$z_1 := -2$

$z_2 := 0.5 + 2i$

$z_3 := 0.5 - 2i$

Poli

$p_1 := 0$

$p_2 := -1$

$p_3 := -1$

$p_4 := -3 + i$

$p_5 := -3 - i$

Regola 1) il numero delle traiettorie è pari al numero dei poli, cioè 5

$z_m =$

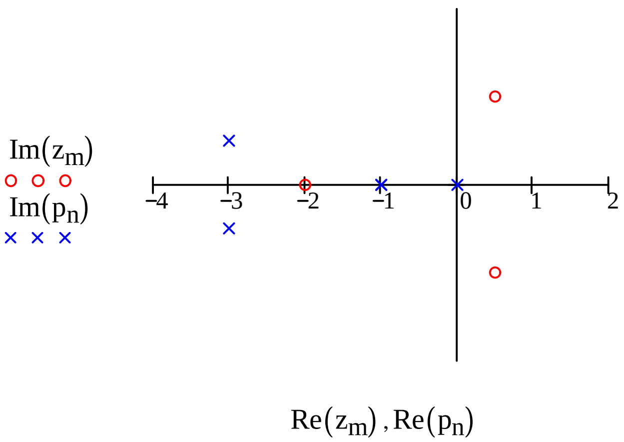
-2
0.5+2i
0.5-2i

$p_n =$

0
-1
-1
-3+1i
-3-1i

Regola 2) le traiettorie partono dai poli e terminano negli zeri. Siccome esiste un polo (-1) di moltemplicità di ordine 2 esistono due traiettorie che emergono da esso.

Regola 3) l'asse reale fa parte del root locus se, preso un punto generico, la somma del numero di poli e di zeri che si trovano a destra di tale punto è dispari. Il tratto dell'asse a sinistra di tale punto fa parte della traiettoria finchè non incontriamo un altro polo o zero sull'asse reale. Se vi sono poli o zeri di molteplicità q, essi devono essere conteggiati q volte.



Vi è una porzione di root locus sull'asse reale tra 0 e -2

Regola 4) Ci sono (n-m) traiettorie che, al crescere di K, tendono a valori infiniti asintoticamente. Gli asintoti sono (n-m) e si dipartono dal centro di gravità.
Essendo n-m=2, vi sono due asintoti.

Calcolo del centro di gravità

$$\gamma := \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} p_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} z_i\right)}{N - M}$$

$$\gamma = -3.5$$

Calcolo dell'angolo

Gli asintoti si dipartono dal centro di gravità formando un angolo con l'asse reale

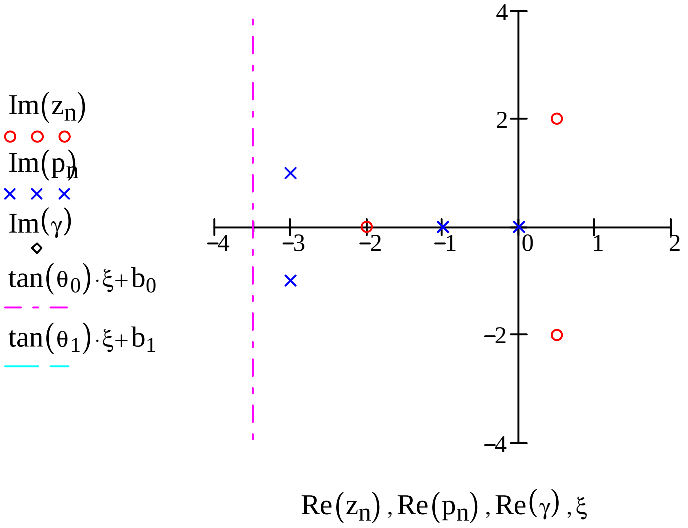
$$l := 0 .. N - M - 1$$

$$\theta_l := \pi \cdot \frac{(2 \cdot l + 1)}{N - M} \qquad b_l := -\gamma \cdot \tan(\theta_l)$$

$\theta_l =$

90
270

deg



Regola 5) Il Breakaway point è il punto in cui due traiettorie, emergendo da due poli adiacenti (o muovendosi verso due zeri adiacenti) sull'asse reale, si intersecano e poi lasciano (o entrano) l'asse, con angoli di $\pm \pi/2$.

Calcolo del breakaway point

$x := -0.1$

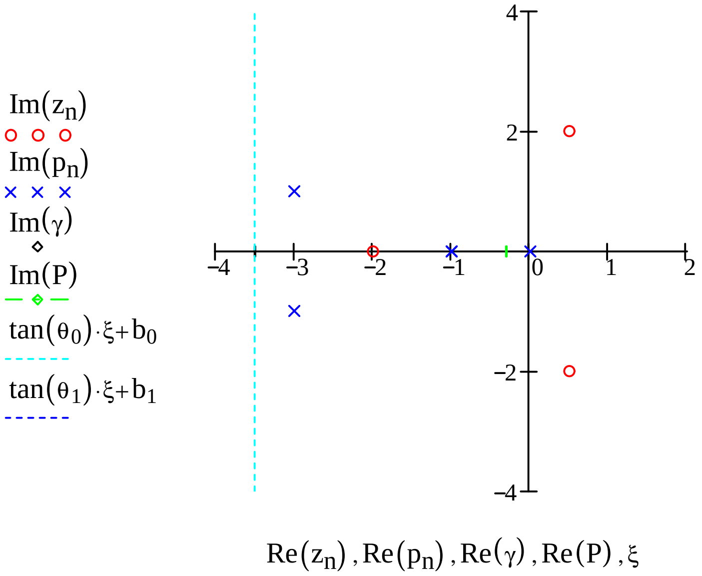
Given

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{x - z_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{x - p_j}$$

$P := \mathrm{Find}(x)$

$P = -0.304$

Esiste un punto di *breakaway*



Regola 6) Le traiettorie che partono da un polo di molteplicità q sono sfalsate da angoli detti di partenza.
Le traiettorie che arrivano ad uno stesso zero di molteplicità ν sono sfalsate da angoli detti di arrivo.

Calcolo degli angoli di partenza

POLO p_3 a molteplicità $q := 2$

$\kappa := 0 .. q - 1$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa + 1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_3 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\mathrm{signum}(p_3 - p_j))\right)}{q}$$

$\Theta_\kappa =$

0
180

deg

Calcolo degli angoli di arrivo

ZERO z_2 a molteplicità $\nu := 1$

$\kappa := 0 .. \nu - 1$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa + 1)\cdot\pi + \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(z_2 - p_j)\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(\mathrm{signum}(z_2 - z_i))\right)}{\nu}$$

$\Theta_\kappa =$

$\boxed{290.111}$ deg

ZERO z_3 a molteplicità $\nu := 1$

$\kappa := 0 .. \nu - 1$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa + 1)\cdot\pi + \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(z_3 - p_j)\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(\mathrm{signum}(z_3 - z_i))\right)}{\nu}$$

$\Theta_\kappa =$

$\boxed{69.889}$ deg

Non ci sono zeri di molteplicità maggiore di uno e quindi non ci sono più traiettorie che arrivano nello stesso zero.

Costruzione del root locus attraverso un metodo *trial-and-error*

Applicazione del criterio dell'angolo

Valore di 1° tentativo (preso sull'asse immaginario): $s := -0.7485i$

$j := 0$

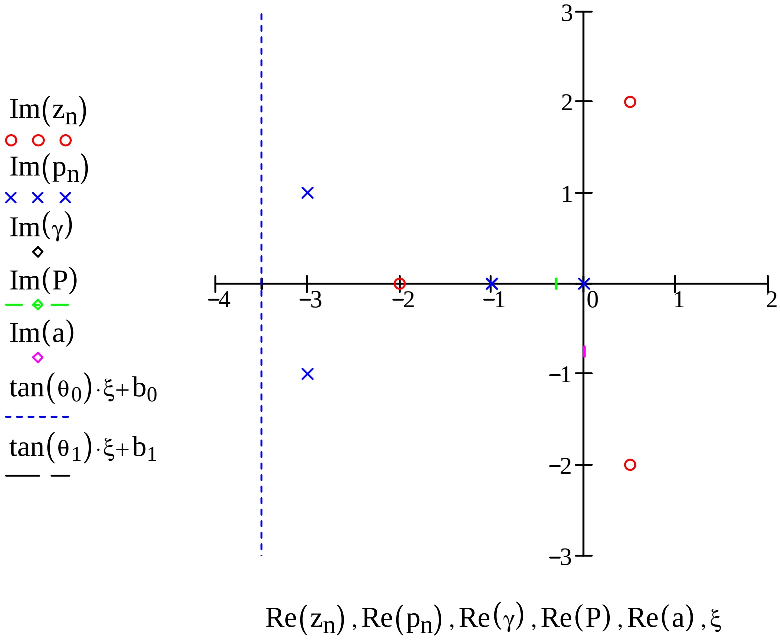
Given

$$\left(\sum_{i=1}^{M} \arg(s - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(s - p_j)\right) = (2j + 1)\cdot\pi$$

$a := \mathrm{Find}(s)$

$a = 1.162 \times 10^{-4} - 0.748i$

Variando il valore di tentativo nel piano complesso, si possono trovare altri punti delle traiettorie



Applicazione del criterio dell'ampiezza e Calcolo del guadagno

Il valore di k per cui il sistema perde la stabilità si calcola dal criterio dell'ampiezza, entrando con il valore di s sull'asse immaginario precedentemente calcolato col criterio dell'angolo (a = -0.748i)

Valore di 1° tentativo: $k := 1$

Given

$$\frac{k \cdot \prod_{i=1}^{M} |a - z_i|}{\prod_{j=1}^{N} |a - p_j|} = 1$$

$k := \mathrm{Find}(k)$

$k = 1.519$