Adattamento del
Problema del 2.03.2005 - Sez. 4 Parte B

Funzione di Trasferimento

$$G_c(s) := K_c\left(\frac{1}{2}s + 1\right) \qquad G_p(s) := \left(\frac{1}{\frac{1}{2}s^2 + s + 1}\right)$$

NB: le Funzioni di Trasferimento $G_c(s)$ e $G_p(s)$ sono date nella forma "**delle costanti di tempo**"

Funzioni di Trasferimento del sistema ad anello aperto

$$G_{OL}(s) := G_c(s) \cdot G_p(s)$$

$$G_{OL}(s) := \frac{K_c(s+2)}{s^2 + 2s + 2}$$

NB: la Funzione di Trasferimento $G_{OL}(s)$ è ora nella forma "**fattorizzata**"

M numero degli zeri e N numero dei poli

$M := 1 \qquad N := 2$

$m := 1..M \qquad n := 1..N$

$z_m := -2 \qquad p_1 := -1 + i \qquad p_2 := -1 - i$

Equazione caratteristica del sistema ad anello chiuso

$$1 + G_{OL}(s) = 0$$

Denominatore della Funzione di Trasferimento ad anello chiuso

$$\mathrm{den}(s) := 1 + G_{OL}(s)$$

$$\mathrm{den}(s) := \frac{s^2 + (2 + K_c)s + 2 + 2K_c}{s^2 + 2s + 2}$$

Assegnazione dei coefficienti del polinomio

$$a(K_c) \equiv \begin{bmatrix} 2(1 + K_c) \\ 2 + K_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

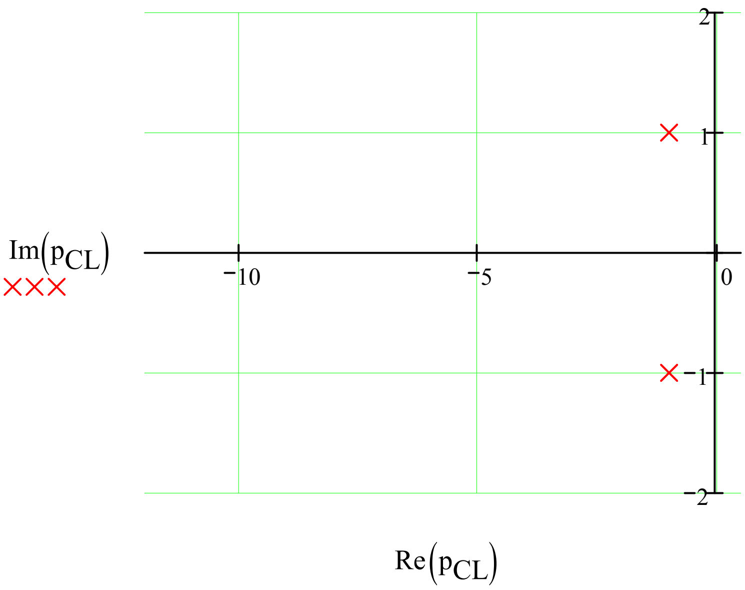
Assegnazione di K_c

$K_c :=$ 0 $\qquad K_c = 0$

Calcolo dei poli

$$p_{CL} := \text{polyroots}(a(K_c)) \qquad p_{CL} = \begin{pmatrix} -1 + i \\ -1 - i \end{pmatrix} \qquad p_{CL_1} = -1 + i$$

$$p_{CL_2} = -1 - i$$



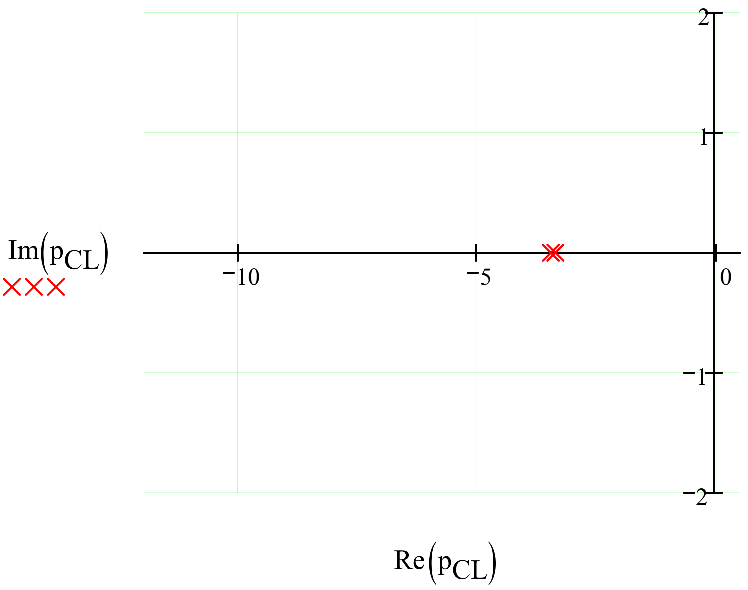
Nuova Assegnazione di K_c

$K_c := 4.83$

Calcolo dei poli

$p_{CL} := \text{polyroots}\left(a\left(K_c\right)\right) \qquad p_{CL} = \begin{pmatrix} -3.462 \\ -3.368 \end{pmatrix} \qquad p_{CL_1} = -3.462$

$p_{CL_2} = -3.368$



Calcolo del *breakaway point*

Valore di 1° tentativo: $x := -3$

Given

$$\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{x - z_m} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{x - p_n}$$

$BP := \text{Find}(x)$

$BP = -3.414$

Regola 6) Le traiettorie che partono da un polo di molteplicità q sono sfalsate da angoli detti di partenza.
Le traiettorie che arrivano ad uno stesso zero di molteplicità ν sono sfalsate da angoli detti di arrivo.

Calcolo degli angoli di partenza

POLO p_1 a molteplicità $q := 1$

$\kappa := 0 .. q - 1$

$$\Theta_{\kappa+1} := \frac{(2\cdot\kappa + 1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_1 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\text{signum}(p_1 - p_j))\right)}{q}$$

NOTA SULL'USO DI MathCad®:
il pedice è posto (κ+1) perché Θ è un vettore dichiarato avere pedice 1 come 1° componente

$\Theta = (135)\,\text{deg}$

NB: L'angolo formato dal luogo delle radici con l'asse x in corrispondenza del primo polo è 135°;

a causa della simmetria rispetto all'asse reale, in corrispondenza dell'altro polo avremo un angolo di -135°

POLO p_2 a molteplicità $q := 1$

$\kappa := 0 .. q - 1$

$$\Theta_{\kappa+1} := \frac{(2\cdot\kappa + 1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_2 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\text{signum}(p_2 - p_j))\right)}{q}$$

$\Theta = (225)\,\text{deg}$

Calcolo degli angoli di arrivo

ZERO z_1 a molteplicità $\nu := 1$

$\kappa := 0 .. \nu - 1$

$$\Theta_{\kappa+1} := \frac{(2\cdot\kappa + 1)\cdot\pi + \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(z_1 - p_j)\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(\text{signum}(z_1 - z_i))\right)}{\nu}$$

$\Theta = (180)\,\text{deg}$

Tracciamento delle traiettorie sul *root locus*

Dati per i calcoli iterativi

$\infty \equiv 10^5$ $\quad$ $Kcmax := 500$ $\quad$ $R := 10000$

$Kc := 0, \frac{Kcmax}{R} .. Kcmax$ $\quad$ $i := 1 .. N$

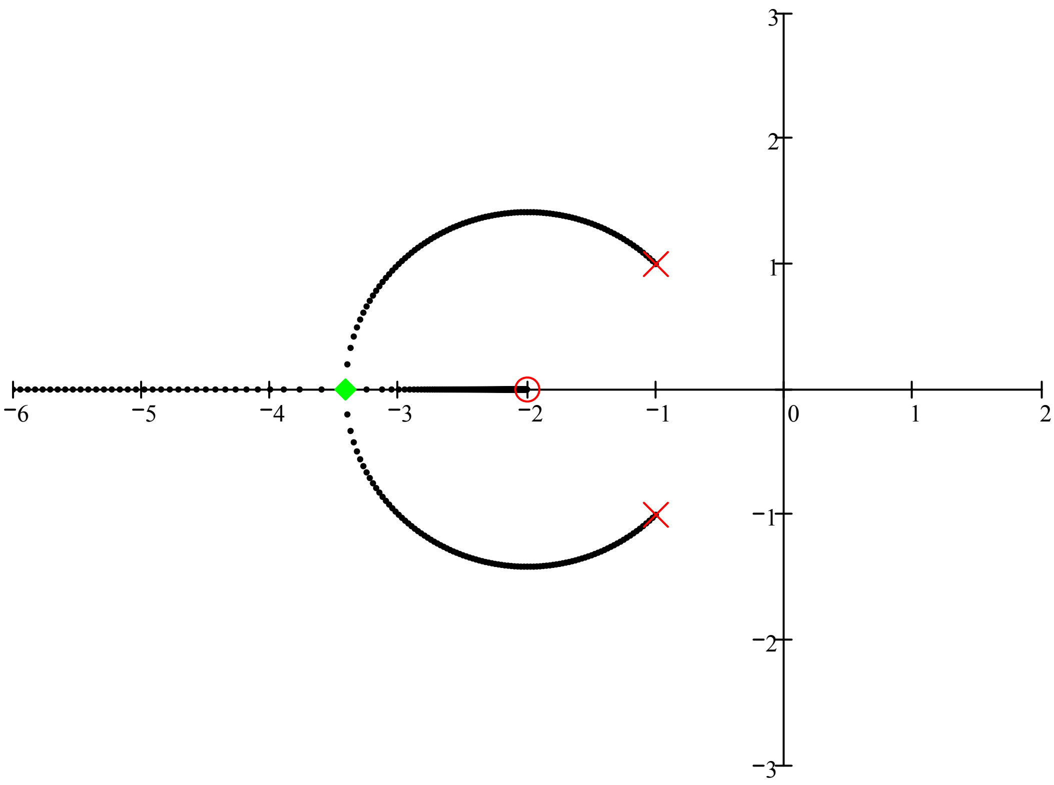
Dati per le scale sugli assi

$Remin \equiv -6$ $\quad$ $Remax \equiv 2$ $\quad$ $Immax \equiv 3$

$VMin \equiv Remin - Immax \cdot \sqrt{-1}$ $\quad$ $VMax \equiv Remax + Immax \cdot \sqrt{-1}$

root locus

$RLre(x) \equiv Re(polyroots(x))$ $\quad$ $RLim(x) \equiv Im(polyroots(x))$



Stabilità del sistema al crescere di K_c.

Il sistema è sempre stabile per qualsiasi valore di K_c in quanto nessuna traiettoria attraversa l'asse immaginario al crescere di K_c.

Limite di applicabilità della tecnica del *root locus*

La funzione di trasferimento deve essere di tipo razionale e non contenere il ritardo di trasporto