Problema del 2.05.05 - Sez. 4 Parte B

Funzione di Trasferimento

$G_m(s) := 1$ $\quad G_f(s) := 1$ $\quad G_p(s) := \dfrac{10s}{s^2 + 4s + 8}$ $\quad K_c := 1$

$G_{OL}(s) := K_c \cdot G_f(s) \cdot G_p(s) \cdot G_m(s)$

NB: la Funzione di Trasferimento è nella forma delle "**costanti di tempo**"

Si vogliono determinare le radici dell'equazione caratteristica del sistema a ciclo chiuso al variare del guadagno K_c

$$1+G_{ol}=0$$

M numero degli zeri e N numero dei poli

$M := 1$ $\quad N := 2$

$m := 1..M$ $\quad n := 1..N$

Assegnazione dei coefficienti dei polinomi

$$den := \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeri

Poli

$$polyroots(den) = \begin{pmatrix} -2+2i \\ -2-2i \end{pmatrix}$$

I poli sono calcolati in MathCad come radici di un'eq. algebrica tramite la funzione **"polyroots"**

$z_1 := 0$

$p_1 := -2 + 2i$ $\quad p_2 := -2 - 2i$

a)

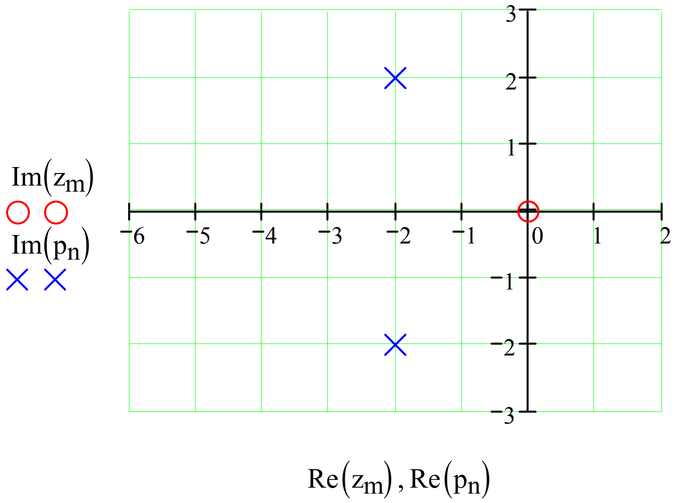
Regola 1) il numero delle traiettorie è pari al numero dei poli, cioè: $N = 2$
Non esistono poli con una molteplicità q > 1.
Non esistono zeri con una molteplicità ν > 1.

$$z_m = \boxed{0} \qquad p_n = \begin{pmatrix} -2+2i \\ -2-2i \end{pmatrix}$$

Regola 2) le traiettorie partono dai poli e terminano negli zeri.

b)

Regola 3) l'asse reale fa parte del root locus se, preso un punto generico, la somma del numero di poli e di zeri che si trovano a destra di tale punto è dispari. Il tratto dell'asse a sinistra di tale punto fa parte della traiettoria finchè non incontriamo un altro polo o zero sull'asse reale. Se vi sono poli o zeri di molteplicità q, essi devono essere conteggiati q volte.



Vi è 1 porzione di *root locus* sull'asse reale tra 0 e -∞ (semiasse negativo).

c)

Regola 4) Ci sono (N - M) traiettorie che, al crescere di K_c, tendono asintoticamente a valori infiniti.
Gli asintoti sono (N - M) e si dipartono dal centro di gravità.
Essendo N - M =1, vi è un solo asintoto, che coincide con l'asse reale.

Calcolo del centro di gravità

$$\gamma := \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} p_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{M} z_i\right)}{N - M} \qquad \gamma = -4$$

Calcolo dell'angolo

L'asintoto si diparte dal centro di gravità formando un angolo con l'asse reale

$$l := 0 .. N - M - 1$$

$$\theta_l := \pi \cdot \frac{2 \cdot l + 1}{N - M} \qquad \theta_l = \boxed{180} \text{ deg}$$

L'asintoto è coincidente con l'asse reale

d)

Regola 5) Il *Breakaway point* è il punto in cui due traiettorie, emergendo da due poli adiacenti (o muovendosi verso due zeri adiacenti) sull'asse reale, si incontrano e poi lasciano (o entrano) l'asse, con angoli di $\pm \pi/2$.

Calcolo del breakaway point

Valore di 1° tentativo: $x := -3$

Given

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{x - z_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{x - p_j}$$

$$P := \mathrm{Find}(x)$$

$$P = -2.828$$

The **MathCad Find** function to solve an equation:

1. Define a first trial value for the **unknown variable**.
2. Type the word ***Given*** to start the procedure.
3. Beneath the Given, type equalities and inequalities as part of the equation.
4. The **Find** function contains the result for the **unknown variable**.

e)

Regola 6) Le traiettorie che partono da un polo di molteplicità q sono sfalsate da angoli detti di partenza.
Le traiettorie che arrivano ad uno stesso zero di molteplicità ν sono sfalsate da angoli detti di arrivo.

In questo caso non esistono molteplicità > 1.

Calcolo degli angoli di partenza

POLO p_1 a molteplicità $q := 1$

$$\kappa := 0..q-1$$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_1 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\mathrm{signum}(p_1 - p_j))\right)}{q}$$

$$\Theta_\kappa = \boxed{225}\ \text{deg}$$

POLO p_2 a molteplicità $q := 1$

$$\kappa := 0..q-1$$

$$\Theta_\kappa := \frac{(2\cdot\kappa+1)\cdot\pi + \left(\sum_{i=1}^{M} \arg(p_2 - z_i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} \arg(\mathrm{signum}(p_2 - p_j))\right)}{q}$$

$$\Theta_\kappa = \boxed{135}\ \text{deg}$$

Controprova: $135 + 225 = 360$

Funzione di Trasferimento ad anello chiuso

$$G_{CL}(s) := 1 + G_{OL}(s)$$

$$G_{CL}(s) \rightarrow 1 + 10\cdot\frac{s}{s^2 + 4\cdot s + 8}$$

$$G_{CL}(s) := 1 + K\cdot 10\cdot\frac{s}{s^2 + 4\cdot s + 8}$$

$$G_{CL}(s) \rightarrow 1 + 10\cdot K\cdot\frac{s}{s^2 + 4\cdot s + 8} \text{ simplify } \rightarrow \frac{s^2 + 4\cdot s + 8 + 10\cdot K\cdot s}{s^2 + 4\cdot s + 8}$$

Questi calcoli sono svolti in MathCad come "calcoli simbolici"

$$G_{CL}(s) := \frac{s^2 + 4\cdot s + 8 + 10\cdot K\cdot s}{s^2 + 4\cdot s + 8}$$

Assegnazione dei coefficienti del polinomio

$$a(K) \equiv \begin{pmatrix} 8 \\ 4 + 10\cdot K \\ 1 \end{pmatrix}$$

f)

Tracciamento delle traiettorie sul *root locus*

Dati per il tracciamento del grafico

$Kcmax := 10$ $\qquad N_{points} := 20000$ $\qquad$ NB: n° di punti

$\omega \equiv 0 \quad \alpha \equiv 0 \quad j \equiv 0..2 \qquad deg \equiv \dfrac{\pi}{180} \qquad \infty \equiv 10^4$

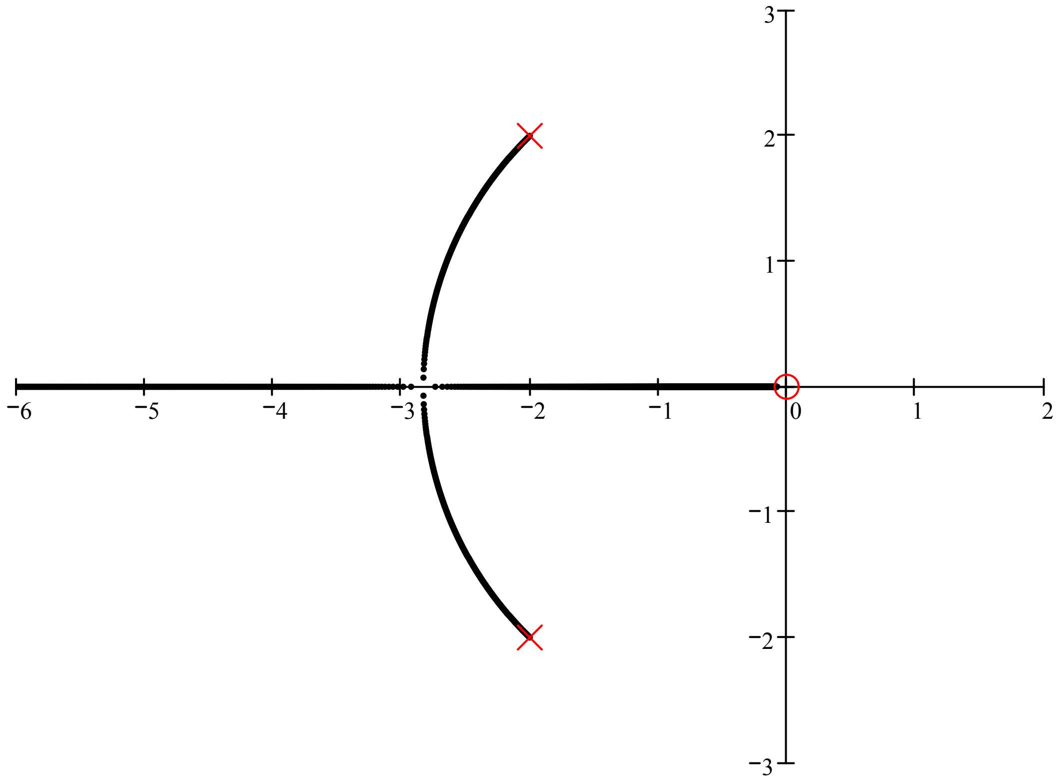
$Remin \equiv -6 \qquad Remax \equiv 2 \qquad Immax \equiv 3$

$VMin \equiv Remin - Immax\cdot\sqrt{-1} \qquad VMax \equiv Remax + Immax\cdot\sqrt{-1}$

$K := 0, \dfrac{Kcmax}{N_{points}}..Kcmax \qquad i := 0..N-1$

root locus

$RLre(A) \equiv Re(polyroots(A)) \quad RLim(A) \equiv Im(polyroots(A))$



g)

Stabilità del sistema al crescere di K_c.

Il sistema è sempre stabile per qualsiasi valore di $K_c > 0$ in quanto nessuna traiettoria attraversa l'asse immaginario al crescere di K_c.

Limite di applicabilità della tecnica del *root locus*

La funzione di trasferimento deve essere di tipo razionale e non contenere il ritardo di trasporto

i)

Controllore che non sia solo <u>proporzionale</u>

Conviene scegliere un <u>controllore proporzionale integrale</u> che introduce un **polo** nell'origine e pertanto elimina lo **zero** presente nell'origine della FdT del processo.

Funzione di Trasferimento ad anello chiuso

$G_m(s) = e^{-2s} \cong (1 - s)/(1 + s)$ FdT del misuratore approssimata con Padé 1° ord.

j)

Questi calcoli sono svolti in MathCad come "calcoli simbolici"

$$G_{CL}(s) := 1 + k \cdot 10 \cdot \frac{s}{s^2 + 4 \cdot s + 8} \cdot \frac{1 - s}{1 + s}$$

$$G_{CL}(s) \rightarrow 1 + 10 \cdot k \cdot \frac{s}{s^2 + 4 \cdot s + 8} \cdot \frac{1 - s}{1 + s} \text{ simplify } \rightarrow \frac{-\left(-5 \cdot s^2 - s^3 - 12 \cdot s - 8 - 10 \cdot k \cdot s + 10 \cdot k \cdot s^2\right)}{\left(s^2 + 4 \cdot s + 8\right) \cdot (1 + s)}$$

$$G_{CL}(s) := \frac{5 \cdot s^2 + s^3 + 12 \cdot s + 8 + 10 \cdot k \cdot s - 10 \cdot k \cdot s^2}{\left(s^2 + 4 \cdot s + 8\right) \cdot (1 + s)}$$

Assegnazione dei coefficienti del polinomio

$$a(K) \equiv \begin{pmatrix} 8 \\ 12 + 10K \\ 5 - 10K \\ 1 \end{pmatrix}$$

k)

Tracciamento delle traiettorie sul *root locus*

Dati per il grafico

$N := 3$

$Kcmax := 50$ $\qquad N_{points} := 1500$ NB: n° di punti

$\omega \equiv 0 \quad \alpha \equiv 0 \quad j \equiv 0..2 \qquad deg \equiv \dfrac{\pi}{180} \qquad \infty \equiv 10^4$

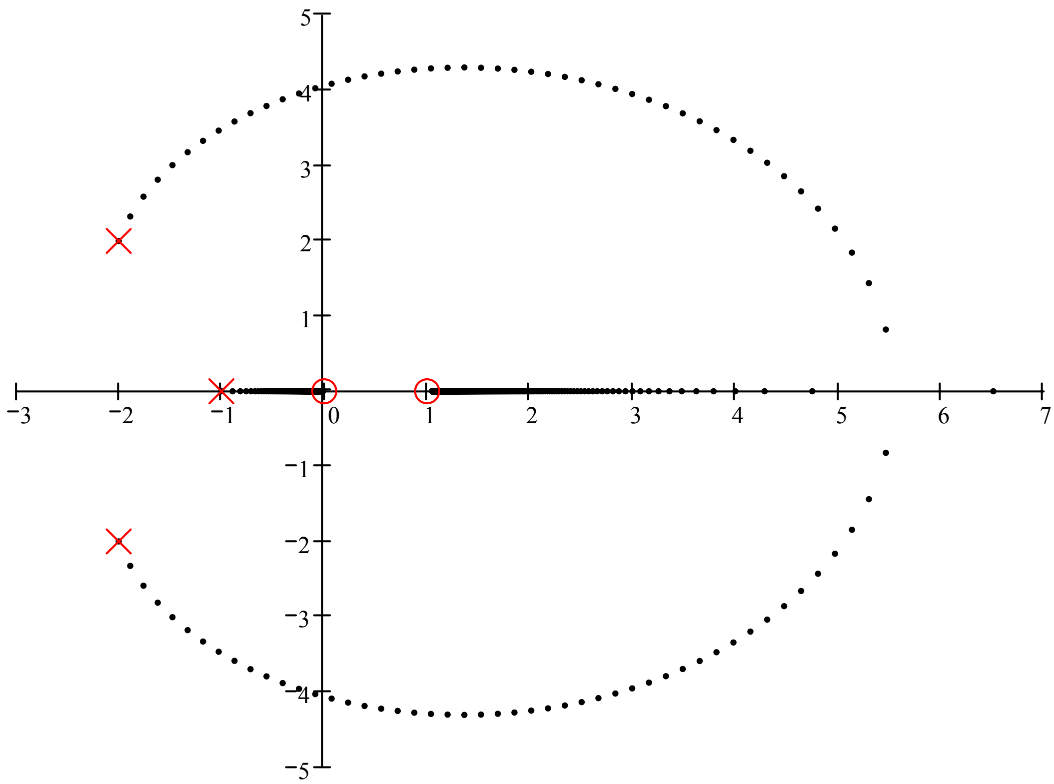
$Remin \equiv -3 \qquad Remax \equiv 7 \qquad Immax \equiv 5$

$VMin \equiv Remin - Immax\cdot\sqrt{-1} \qquad VMax \equiv Remax + Immax\cdot\sqrt{-1}$

$K := 0, \dfrac{Kcmax}{N_{points}} .. Kcmax \qquad i := 0..N-1$

root locus

$RLre(A) \equiv Re(polyroots(A)) \quad RLim(A) \equiv Im(polyroots(A))$



NB: trattasi del cosiddetto "**luogo inverso**" delle radici, determinato dal segno negativo di $G_m(s)$